MEMORIE

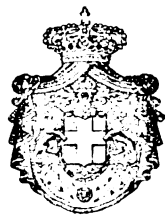
DELLA

REGIA ACCADEMIA

DI

SCIENZE, LETTERE ED ARTI

IN MODENA

SERIE II. - VOLUME XII.

MODENA
COI TIPI DELLA SOCIETÀ TIPOGRAFICA
ANTICA TIPOGRAFIA SOLIANI

1902.

MEMORIE

DELLA

SEZIONE DI SCIENZE

Libro III.

Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci.

Il programma che dobbiamo svolgere nell' attuale Libro della nostra storia è indicato dalle parole con cui chiudesi il precedente: determinare, cioè, quali indagini di matematica pura siano state istituite e quali nuove verità siano state scoperte da quelli fra gli scienziati Greci che si proposero di stabilire razionalmente le leggi governatrici di tutti quei fenomeni naturali che sembrano suscettibili di una trattazione veramente scientifica (1). Se per raggiungere tale intento saremo trascinati a qualche incursione sopra territorî attigui, ma estranei, al campo di nostra pertinenza, sarà soltanto nei casi in cui riterremo ciò inevitabile, onde confidiamo che il lettore, riconoscendolo, non ci rimprovererà di avere deviato dalla trajettoria che ci siamo prefissati.

---

(1) Escludemmo i fenomeni concernenti i suoni perchè le relative indagini non sono teoricamente abbastanza conclusive, benchè siano dovute ad Euclide, Tolomeo (v. Wallis, *Opera*, T. III, Cambridge, 1699) e a molti altri (cfr. A. J. H. Vincent, *Notice sur trois manuscrits grecs relatifs à la musique* in *Notices et Extraits des manuscrits* etc. T. XVI, 2ᵉ Partie, 1847), i quali s' ispirarono ad Archita, che riteneva geometria ed astronomia, aritmetica e musica « come due coppie di sorelle gemelle, simili agli organi che noi possediamo doppî: le due facce principali dell' essere sembrano riflettervisi dall' una all' altra » (vol. or citato, p. 379).

I.

Ipotesi cosmologiche e misurazioni astronomiche anteriori ad Ipparco.

1. Se ad un problema collegato alle necessità del civile consorzio — quale è quello della ripartizione delle terre (cfr. L. I, n. 3) — si pretende debba la vita la Geometria, havvi un altro ramo della matematica la cui esistenza deve essere stata prodotta da innumerevoli contingenze, cioè l' Astronomia: infatti il regolare avvicendarsi delle stagioni interessa l'agricoltore, mentre al navigante è indispensabile la conoscenza del corso degli astri, e questa serve poi al sacerdote per fissare le feste periodiche (1) ed a chiunque voglia giungere a determinare le singole ore del giorno e della notte (2); d'altronde non è forse l' Astronomia la scienza che sola è capace di dare alla cronologia una solida base?

I ritrovati fatti dai Cinesi, dai Babilonesi e dagli Egiziani nel contemplare i fenomeni celesti mostrano ad evidenza che in ogni tempo l'astronomia esercitò un fascino irresistibile sopra tutti coloro che ne valutarono la portata, che videro come essa, rivelando tanti lati interessanti dell'architettura del mondo, ponesse in grado di soddisfare, in parte almeno, il desiderio connaturato all'uomo e mai estinguibile, di penetrare nell'essenza delle cose. I Greci, forse grazie ai molteplici contatti che ebbero coi popoli dell' Asia e dell' Africa, durante i lunghi viaggi di esplorazione da essi intrapresi, furono ben presto messi al corrente di quanto era stato osservato, congetturato o scoperto dai popoli di più remota civiltà (3), e fu-

---

(1) Si ricordino le Feste Eleusine degli Ateniesi ed i Giuochi Olimpici a cui accorreva tutta la Grecia.

(2) Ed infatti Socrate — lo attesta Senofonte (*Memor.*, IV, 7) — raccomandava ai giovani di studiare l' astronomia per essere in grado di riconoscere, durante i viaggi per mare, le epoche della notte, del mese e dell' anno.

(3) « I matematici, scrive Teone Smirneo, non considerando che i fenomeni ed i moti planetarî prodotti secondo il corso delle cose, dopo averli osservati a lungo in luoghi favorevoli, in Babilonia, in Caldea, in Egitto, cercavano con ardore dei principî e delle ipotesi che spiegassero i fenomeni. Arrivarono così a confermare i fatti osservati

rono spinti a seguirne l'esempio; messisi sopra tale strada, ponendo a profitto le notti proverbialmente serene dell'Ellade ed applicando le cospicue doti investigatrici, che li fanno considerare come appartenenti ad una razza privilegiata, non tardarono a far compiere alla scienza degli astri dei notevoli progressi, ad imprimere anzi ad essa quell'indirizzo che era indispensabile per trasformare un catalogo di osservazioni in un tutto omogeneo razionalmente ordinato (1). Ed è appunto grazie a questo indirizzo che i pensatori Greci diedero tanto all'astronomia (2) quanto a quei rami della fisica che servono ad essa come ausiliari, che essi poterono aspirare a conseguire ed ottennero un posto onorevole nella storia della matematica pura; essi infatti sia che studiassero le trajettorie degli astri o i pretesi suoni cagionati dai loro movimenti, sia che indagassero le leggi di questi moti, vuoi che si domandassero come è regolata la propagazione della luce o che si occupassero delle dimensioni della terra, sempre procedevano, od almeno tentavano di procedere, secondo le norme di una logica rigorosa; e così posero i fondamenti dell'astronomia matematica e della musica teorica, della meccanica, dell'ottica geometrica e della geodesia, non senza incidentalmente accrescere di nuove verità il patrimonio della geometria. Queste sole hanno per noi una diretta importanza; ma quale interesse presen-

---

ed a predire i fenomeni futuri, i Caldei con metodi aritmetici, gli Egiziani con metodi grafici, tutti con metodi imperfetti e senza una sufficiente scienza della natura; giacchè bisogna anche discutere i fatti dal punto di vista fisico. Coloro che studiarono l'astronomia in Grecia tentarono di farlo servendosi dei principî e delle osservazioni di questi stranieri » (Teone Smirneo, ed. Dupuis, p. 286).

(1) Della stessa opinione è W. Whewell *History of inductive Sciences*, T. I (London, 1837) p. 32. V. anche L. Am. Sédillot, *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et chez les Orientaux* (Paris, 1845 e 1849) e *Sur quelques points de l'astronomie ancienne* (Bull. di Bibl. e Storia ecc., T. V, 1872, p. 306-317). Th. H. Martin ha poi mostrato che quello di teorico che i Greci appresero da altri non è gran cosa (v. l'*Examen d'un livre posthume de M. Letronne* in *Révue archéologique*, 1854 e la memoria *La précession des equinoxes a-t-elle été connue avant l'époque d'Hipparque?* in Mém. de l'Acad. des Inscriptions, Savants ét., T. VIII, I Partie, 1869); per l'astronomia dunque sussiste ciò che osservammo (L. I, n. 2) riguardo alla geometria.

(2) Si potrebbe anzi dire che è *soltanto* grazie a tale indirizzo che le ricerche astronomiche dei più antichi Greci meritino la stima che viene loro tributata; chè d'altronde i concetti aprioristici che le informano e le esperienze poco degne di fede su cui riposano, le farebbero collocare ad un livello assai basso.

terebbe una nuda enumerazione di esse, non accompagnata da alcuna notizia sul come, sul quando, sul perchè vennero scoperte? Certamente ben poca; onde è necessario che invitiamo il lettore a ritornare con noi agli albori della civiltà greca, per determinare i mezzi di cui gli Elleni si servirono per comporre un solido edificio scientifico con i materiali greggi che avevano recato in patria dall'Oriente e dal Mezzogiorno (1). Durante il nostro cammino c'imbatteremo in opinioni strane e talora erronee, in ipotesi puerili; le ricordiamo perchè la storia della scienza deve interessarsi alle une ed alle altre, per misurare quanto servirono al progresso o per avvertire quanto lo ostacolarono.

Ipotesi astronomiche contrarie alla sfericità della terra.

2. Ci dispensiamo dal raccogliere le prove di cognizioni astronomico-cosmografiche somministrate da un attento studio delle opere di Omero ed Esiodo, giacchè, se esse conducono a valutare quanto fosse conosciuto nei secoli X e IX a. C. intorno alla configurazione dei continenti e dei mari costituenti pei Greci l'universo, a determinare quanti e quali astri fossero già stati osservati, non gettano alcuna luce sulle persone e nemmeno sui popoli a cui si devono tali osservazioni (2). Rileviamo soltanto l'assimilazione della terra ad un disco galleggiante sul fiume Oceano (3) e sottoposto ad un

---

(1) Questa preistoria dell'astronomia venne ricostruita quasi completamente nella seconda metà del secolo presente da Th. H. Martin e G. V. Schiaparelli (i lavori dei quali saranno menzionati più innanzi); gli storici più antichi (Bailly, Montucla, Delambre) o trascurarono di occuparsene od incorsero in errori assai gravi, onde non ci accadrà di citarli che per eccezione.

(2) Informazioni più estese e precise si attingono dai dottissimi lavori di Th. H. Martin intitolati: *Mémoire sur la cosmographie grecque à l'époque d'Homère et Hésiode* (Mém. de l'Acad. des Inscriptions et Belles Lettres, T. XXVIII, Ire Partie, 1874, p. 211-237); *Mémoire sur la signification cosmographique du mythe d'Héstia dans la croyance antique des Grecs* (Ivi); *Mémoire sur la cosmographic populaire des Grecs après l'époque d'Homère et d'Hésiode* (Id., II Partie, 1876, p. 155-178); *Comment Homère s'orientait* (Id., T. XXIX, II Partie, 1879, p. 1-28).

(3) Il diametro di questo disco non poteva superare le 12 mila miglia, tale essendo la distanza tra il centro della Trinacria ed il fiume Fasi in Colchide, alle cui bocche la leggenda fa approdare gli Argonauti.

emisfero solcato dalle stelle, le quali al sorgere del sole si tuffano nell'acqua e scompajono; assimilazione che dimostra ad evidenza come le osservazioni in allora compiute non dovevano essere molto numerose, dal momento che erano così poco soddisfacenti le ipotesi con cui si era tentato di coordinarle fra di loro.

3. Dimostrata fantastica (1) la esistenza di un astronomo Ferecide, al quale il Bailly (2) gratuitamente attribuisce la costruzione di un meccanismo rappresentante il movimento del sole, lo scienziato che determina od almeno segna la transizione dalla cosmografia poetica e popolare dei Greci ad una embrionale scienza astronomica è Talete (cfr. L. I. n. 5), il quale è perciò chiamato *padre dell' astronomia greca.* Egli, benchè ammettesse al pari dei suoi conterranei anteriori — essere la terra galleggiante sull' acqua (anzi in ciò egli rinvenne una spiegazione dei terremoti), pure cambiò il fiume Oceano in un mare illimitato circondante la terra e questa concepì di forma sferica, secondo alcuni, discoide al dir di altri (3). Si pretende anche che egli avesse capito essere la luna un corpo opaco illuminato dal sole e che ne deducesse una attendibile spiegazione del fenomeno delle eclissi solari (4); alla volta emisferica celeste egli sostituì l'intera sfera celeste, che divenne da allora in poi il campo di studio degli astronomi teorici, e propose anche di suddividerla in cinque zone. Che poi, come afferma Cicerone (5), Talete abbia

---

(1) Cfr. Th. H. Martin, *Mémoire sur les hypothèses astronomiques des plus anciens philosophes de la Grèce étrangers à la sfériсité de la terre* (Mém. de l' Acad. des Inscr. et Bel. Let., T. XXIX, II Partie, 1879, p. 29-252). A questo importante scritto attingemmo largamente nel redigere il presente §; ci servimmo anche della dissertazione di M. Sartorius, *Die Entwickelung der Astronomie bei den Griechen bis Anaxagoras und Empedokles, in besonderem Anschluss an Theophrast* (Zeitschr. f. Philos. und phil. Kritik, T. LXXXII e LXXXIII, 1883), ove è sfruttata la collezione del Diels *Doxographi graeci* (Berlin, 1879) per quanto concerne la Scuola Jonica. Lo stesso è fatto per tutti i *fisiologi* greci da Talete ad Empedocle nell' opera di P. Tannery, *Pour l' histoire de la science hellène* (Paris, 1887), pure da noi consultata.

(2) *Histoire de l' astronomie ancienne* (Paris, MDCCLXXV), p. 197.

(3) Il Tannery ha notato (*Science hellène,* p. 7) l' analogia esistente tra le idee cosmologiche di Talete e quelle che, a quanto riferisce il Maspero (*Histoire ancienne des peuples de l' Orient,* p. 77), avevano gli antichi Egiziani.

(4) Teone Smirneo, ed. Dupuis, p. 320. Si ricordi ancora la predizione di un'eclisse di sole (L. I, n. 6), e si noti che al capo della Scuola jonica si fa merito di avere insegnato ai Greci la sostituzione dell'anno di 30×12 giorni coll' anno di 365.

(5) *De Rep.* I, 14.

anche costruito un globo materiale per rappresentare il firmamento, è cosa non inverosimile, ma nemmeno certa: ove fosse dimostrata la verità di tale notizia, il filosofo di Mileto sarebbe anche il fondatore della *sferopea,* cioè di quella parte della meccanica applicata — a cui gli antichi attribuivano tanta importanza — avente appunto per oggetto l'imitazione materiale dei movimenti celesti (1).

4. Anassimandro (cf. L. I. n. 11), preteso successore di Talete nella direzione della Scuola jonica ed autore della più antica rappresentazione della superficie terrestre, per primo osservò (a quanto attesta Plinio) l'obliquità dell'eclittica e concepì la possibilità che la terra esistesse nello spazio senz' alcun sostegno; questa poi ritenne, non sferica come volle alcuno, ma sibbene cilindrica, di altezza eguale alla terza parte del diametro della base. Tale cilindro sarebbe, secondo Anassimandro, immobile e circondato da tre anelli circolari: il solare, il lunare e lo stellare; del primo il diametro esterno è 28 e l'interno 27 volte il diametro della terra; del secondo i diametri sono uno 19 volte e l'altro (probabilmente) 18 quello della terra; e quelli del terzo sono 10 e 9 volte quello della terra. Tacendo del tentativo fallito fatto da Anassimandro per paragonare la grandezza del sole a quella della terra, e della costruzione di una sfera per rappresentare i moti degli astri, che a lui viene attribuita da Plinio e Diogene Laerzio, ci arresteremo un istante sopra una idea che Plutarco gli attribuisce. Secondo tale idea i pianeti in origine si muovevano lungo cerchî paralleli al circolo base del cilindro terrestre, ma il calore facendo aumentare la tensione dell' aria ambiente, determinò dei vortici che fecero deviare i corpi celesti, più di tutti il sole, poi la luna, poi il cielo delle stelle fisse; se in questa congettura si trova la prima radice della famosa ipotesi vagamente formulata da Buffon, intravveduta più chiaramente da Kant e completamente svolta da Laplace (2), altri giudichi; a noi basta avere segnalata tale antichissima spiegazione genetica del nostro sistema planetario.

---

(1) Proclo-Taylor, T. I, p. 78; Proclo ed. Friedlein, p. 41. V. anche Pappo ed. Hultsch, p. 1026, donde parrebbe essere Archimede il primo che si occupò della sferopea; ad ogni modo è certo che il grande geometra dedicò a questa materia un' opera, oggi perduta.

(2) Vedi Braunmühl, *Geschichtliche Darstellung der hauptsächlichsten Theorien über die Entstehung des Sonnensystems.*

5. Il terzo dei fisici Jonî, Anassimene (cf. L. I, n. 12), compose verso la fine del VI Sec. a. C. un trattato filosofico in prosa, del quale il compilatore Stobeo (circa nell'anno 500 dell' E. v.) ci ha trasmesso un frammento. Benchè seguace di Anassimandro, egli si permise di introdurre nelle discipline da questo professate delle alterazioni di vario valore. Così egli ridusse il cilindro, con cui Anassimandro avea raffigurata la terra, ad avere altezza nulla, in altri termini ammise che tutti i corpi celesti, inclusa la terra, fossero dischi sottilissimi sospesi e volteggianti per l'aria; così, con Talete e contro Anassimandro, ammise che la luna ricevesse la propria luce dal sole (1), e dedusse da ciò una spiegazione delle eclissi lunari, cosa a cui sembra non giungesse il saggio di Mileto. Aggiungasi che Anassimene considerò le stelle fisse come enti analoghi alla luna ed al sole, ma posti ai confini del mondo; tutti gli astri ammise poi fissati sulla volta celeste — riguardata per solida — come chiodi sul cristallo; suppose finalmente che la volta celeste rotasse attorno ad un asse perpendicolare alla terra, cioè fosse mobile " come un cappello sulla testa ". Ciò, praticamente, val quanto ridurre ad un emisfero lo spazio solcato dagli astri, epperò, da un certo punto di vista, segna un regresso, i cui effetti sarebbero stati sensibili per l'avvenire della geometria e della meccanica celeste, se le indagini astronomiche non fossero poi state continuate fuori dalla Jonia ed in altra direzione, come vedremo nel §. seguente.

6. Ma prima di dire per che modo l'astronomia venne rimessa sulla buona strada, è dover nostro indicare alcuni altri scienziati che fecero adesione, più o meno completa, alle idee cosmologiche sostenute dai discepoli di Talete. Ed anzitutto ci si presenta il celebre Eraclito d'Efeso (VI Sec. a. C.), il quale, benchè dotato di ottime qualità di pensatore originale, forse perchè deficiente di quelle di osservatore, fece piuttosto regredire che avanzare la scienza di cui ci occupiamo; infatti l'errore che consiste nel giudicare luminosa la luna non è compensato dalla spiegazione della minore luminosità delle stelle col ritenerle più lontane dalla terra di quanto sia il sole. Peggio ancora comportossi rispetto alla scienza del cielo il fondatore della scuola eleatica; infatti Senofane di Colofone col sostenere che gli

---

(1) Teone Smirneo, ed. Dupuis, p. 320.

astri hanno la vita di un giorno (cioè nascono nell'istante in cui li vediamo sorgere sull'orizzonte e si dissolvono quando li vediamo tramontare) non ha egli forse attentato alla vita stessa della scienza astronomica? E coll'ammettere per rettilinee le trajettorie dei corpi celesti (1) non ha forse involontariamente agito nel senso di traviare gli scienziati dalla strada che sola potea condurli a glorioso porto? (2) Ed in tale opera di dissoluzione venne secondato dai proprî discepoli, poichè gli Eleati, sforzandosi di negare l'esistenza del movimento (cf. L. I, n. 31), indirettamente tentarono di rendere impossibile perfino il concetto di meccanica celeste.

Nè altre scuole filosofiche fecero meglio; così Anassagora si rivelò piuttosto un ardito costruttore di ipotesi che un vero astronomo (3), nè meglio si comportarono rispetto all'astronomia il suo discepolo Archelao, e Diogene d'Apollonia, seguace di Archelao; altrettanto può ripetersi per Antifonte d'Atene (cf. L. I, n. 48), che qui rappresenta la setta dei sofisti per Empedocle, e per Democrito, il celebre atomista di Abdera. Tutti abbracciarono, non senza ritoccarle, le opinioni dei fisici della Jonia; senza discuterne o sperimentarne le verità, essi se ne servirono qual punto d'appoggio ad elucubrazioni metafisiche su la costituzione e la genesi del mondo: da essi la scienza positiva nulla poteva attendere ed infatti nulla a loro deve.

Ipotesi astronomica di Pitagora.

7. La setta di filosofi che fugò i sogni fatti dai Greci durante le tenebre della loro ignoranza in fatto di astronomia è quella stessa

(1) Tolomeo (*Composition mathématique*, ed. Halma, T. I, Paris, 1813, p. 8) ha combattuta tale ipotesi, senza però indicare a chi appartenga; ma Teone Alessandrino (*Commentaire sur la Composition mathématique de C. Ptolemée*, ed. Halma, T. I, Paris, 1821, p. 20-21) l'attribuisce ad Epicuro e la dice accettata da Eraclito. Alla stessa ipotesi — disapprovandola, ma senza designarne il creatore — fa allusione Teone Smirneo (ed. Dupuis, p. 200).

(2) Che queste non sian le uniche e nemmen le maggiori stravaganze astronomiche partorite dalla sbrigliata fantasia dei Greci, lo sa chi conosce il *Saggio sopra gli errori popolari degli antichi* di G. Leopardi.

(3) In Anassagora si è ravvisato un primo cenno dell'attrazione: v. una frase assai espressiva di Jacobi riferita da Alessandro Humboldt (*Kosmos*, T. II, 1847, p. 348).

a cui, come sappiamo (L. I. n. 19), devesi se la geometria e l'aritmetica passarono — per servirci della terminologia di Augusto Comte — dallo stadio metafisico allo stadio scientifico. Giacchè generalmente respingesi come falsa l'affermazione di Eudemo da Rodi, riferita da Teone Smirneo, che " Anassimandro trovò essere la terra sospesa in aria e moversi intorno al centro del mondo „ (1), e ritiensi che Pitagora (2), prima di qualunque altro, insegnasse essere la terra sferica ed abitabile anche nell'emisfero opposto a quello in cui sta la Grecia, essere dessa divisa in cinque zone col centro fisso nel centro dell'universo; attorno ad essa, secondo il filosofo di Samo, hanno luogo le rivoluzioni, obliquamente contrarie del sole, della luna e degli altri pianeti (3). È questo il sistema planetario che Platone fece esporre da un discepolo di Pitagora, Timeo da Locri, nel dialogo che da questo intitolasi; è in sostanza quello stesso a cui Dante si inspirò quando scrisse (*Paradiso,* XXII, 133-150):

Col viso ritornai per tutte quante
Le sette spere, e vidi questo globo (4)
Tal, ch'io sorrisi del suo vil sembiante,
E quel consiglio per migliore approbo
Che l'ha per meno; e chi ad altro pensa
Chiamar si puote veramente probo.
Vidi la figlia di Latona (5) incensa
Senza quell'ombra, che mi fu cagione
Perchè già la credetti rara e densa.
L'aspetto del tuo nato (6), Iperione,
Quivi sostenni, e vidi com'si move
Circa e vicino a lui Maia e Dione (7).

(1) Theonis Smyrnaei Platonici *Liber de astronomia*; ed. Martin, Paris, 1849, p. 323; ed. Dupuis, p. 320.

(2) Th. H. Martin, *Études sur le Timée*, T. II, (Paris, 1841), pag. 101-119 e *Hypothèse astronomique de Pythagore* (Bull. di Bibl. e Storia, T. V, 1879, p. 99-126); G. V. Schiaparelli, *I precursori di Copernico nell' antichità* (Milano, 1873, p. 2-4).

(3) Secondo alcuni Pitagorici, l'ordine in cui s'incontrano i pianeti dopo la Luna è il seguente: Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno (Teone Smirneo, ed. Dupuis, p. 226).

(4) La terra.

(5) La luna.

(6) Il sole.

(7) Mercurio e Venere.

Quindi m' apparve il temperar di Giove
Tra il padre e il figlio; (1) e quindi mi fu chiaro
Il variar che fanno di lor dove:
E tutti e sette mi si dimostraro
Quanto son grandi e quanto son veloci,
E come sono in distante riparo.

Se poi Pitagora macchiò le sue geniali concezioni colla fantastica introduzione dell'*antiterra* (ἀντίχθων), per portare a *dieci* (2) la totalità delle rivoluzioni celesti, e collo stabilire una certa relazione — che gli storici non giunsero peranco a precisar bene (3) — tra le distanze dei corpi celesti dalla terra (4) ed i numeri corrispondenti ai varî suoni della scala musicale — relazione che spiegherebbe l'armonia delle sfere celesti e che gli fece considerare l'astronomia e la musica come scienze sorelle (5) — se egli si lasciò trascinare a tali divagazioni antiscientifiche, noi matematici non dobbiamo fargliene soverchio addebito: giacchè egli, anche in tale circostanza (cf. L. I, n. 13), sforzandosi di stabilire un legame tra l'aritmetica ed i fenomeni naturali, si attenne a quei criterî preferiti oggi dagli scienziati; d'altronde, Dante stesso non si è forse lasciato sedurre dal fascino che possiedono i riavvicinamenti supposti da Pitagora, quando aggiunse il cielo delle stelle fisse e quello del primo mobile, contenuti nell'Empireo, a quelli della Luna, del Sole e dei cinque pianeti, per portare a dieci il numero totale dei cieli? e Ticone Brahe non ha forse fatto rivivere e tentato di spiegare l'armonia celeste? (6) Ma anche coloro che negheranno a Pitagora l'assoluzione che noi chiediamo pei suoi traviamenti, converranno indubbiamente con

(1) Saturno e Marte.

(2) Numero sacro ai Pitagorici perchè, essendo somma dei quattro primi numeri della serie naturale, lo consideravano la immagine della perfezione. Cfr. Teone Smirneo (ed. Dupuis), p. 76 e 154.

(3) G. V. Schiaparelli, *Opinioni e ricerche degli antichi sulle distanze e sulle grandezze dei corpi celesti* (Mem. dell' Ist. Lombardo, 3ª Serie, T. X, 1867, p. 6); P. Tannery, *Recherches sur l' histoire de l' astronomie ancienne* (Paris, 1893) p. 323-336.

(4) Secondo Plinio i Pitagorici ritenevano che la distanza fra la terra e la luna fosse di 126 mila stadii, il doppio quella tra la luna ed il sole, il triplo quella tra il sole ed il cielo delle stelle fisse.

(5) Teone Smirneo (ed. Dupuis), p. 10.

(6) Cfr. A. von Humboldt, *Kosmos* (T. II, 1847), p. 353.

noi che, col diffondere le nozioni della sfericità della terra e dei movimenti proprî dei pianeti da Occidente verso Oriente secondo cerchî obliqui all'equatore celeste, egli, coadiuvato da' suoi discepoli, pose la base a quella colonna di cui Ipparco dovea somministrare il tronco e Claudio Tolomeo il capitello.

Va qui notato che l'idea della sfericità della terra non fu ammessa per vera da tutti i contemporanei di Pitagora; tuttavia essa penetrò subito in una scuola differente da quella ove veniva ufficialmente professata, cioè in quella di Senofane: lo prova quanto ha sostenuto circa cinque secoli a. C. Parmenide d' Elea (1); il quale inoltre con Pitagora ammetteva l' identità della stella della sera (Espero o Vespero) con quella del mattino (Lucifero o Fosforo) (2), ma da quello si staccava quando asseriva che, allontanandosi dalla terra, s'incontrasse prima la sfera celeste, contenente Mercurio, Marte, Giove e Saturno, poi il Sole, la Luna e da ultimo Venere. Come egli si comportasse riguardo alla nozione dell' obliquità dell' eclittica, attribuita ad Oinopide (v. L. I, 33) (3), ci è ignoto.

Il primo sistema eliocentrico.

8. Spento Pitagora, l' abito dell' osservare non venne smesso dai Greci, nè cessò il desiderio di spiegare i fenomeni celesti, e, crescendo il numero dei fatti accertati, ben presto si vide come, volendo rendersi ragione del come avvengono i movimenti degli astri, fosse indispensabile staccarsi dai tre canoni che, secondo i placiti pitagorici, regolano tali movimenti, che cioè essi siano perfettamente circolari, concentrici e di velocità uniforme. Il primo che, per quanto si sa, professò tale abbandono è Filolao, contemporaneo di Socrate e Democrito, epperò non immediato discepolo di Pitagora (4). Filolao naque a Taranto od a Crotone, visse qualche

---

(1) Th. H. Martin, *Hypothèse astronomique de Parmenide* (Mém. de l' Acad. des Inscriptions et Belles Lettres, T. XXIX, 2e Partie, 1879; p. 305-318).

(2) Tale identità venne probabilmente insegnata a Pitagora dai Caldei o dagli Egiziani.

(3) Teone Smirneo ed. Dupuis, p. 321, riferendosi alla storia dell' astronomia di Eudemo.

(4) Th. H. Martin, *Études sur le Timée de Platon*. T. II (Paris, 1841), p. 92-161, e *Hypothèse astronomique de Philolaüs* (Bull. di Bibl. e Storia ecc., T. V, 1872, p. 127-157), Schiaparelli, *I precursori di Copernico* ecc. p. 4-11.

tempo ad Eraclea in Lucania, e più tardi, cioè sullo scorcio del V. Sec. a. C., a Tebe in Beozia: a lui si attribuisce la prima esposizione scritta delle dottrine pitagoriche. Come il Maestro, egli fa risiedere nel numero la causa costante dell'ordine che regna nel mondo, e fa dell'unità il principio dei numeri, anzi di tutto ciò che esiste, sicchè egli la identifica con Dio. Ma, a differenza di Pitagora, affida la parte principale del suo sistema cosmologico, non soltanto al numero dieci, ma eziandio al fuoco centrale; quindi, secondo lui, i cinque pianeti — il sole, la luna, la terra, l'antiterra e le sfere delle stelle fisse — effettuano le loro rivoluzioni attorno al fuoco centrale con velocità differente, ma in una stessa direzione da Occidente verso Oriente; la terra e l'antiterra con obliquità nulla, gli altri con obliquità differenti. Tale concezione del nostro sistema planetario è ingegnosa, ma — forse per essere aprioristica — è incapace di spiegare alcuni fatti attestati dall'esperienza; non può certamente dirsi identica al sistema che da Copernico prende nome, ma rappresenta indubbiamente il primo avviamento verso di questo, per determinare il quale era necessaria gran forza d'intelletto e non comune ardimento, visto che per gli antichi la fissità della terra sembrava un fatto incontrastabile.

9. Quelli che vennero dopo Filolao ne modificarono in parte le idee (1). Vanno specialmente ricordati Iceta ed Ecfanto, filosofi pitagoreggianti, vissuti a Siracusa tra la fine del V. Sec. ed il principio del IV, i quali, abbandonando in parte l'antico principio che la terra fosse immobile, ammisero la rotazione diurna di essa attorno al proprio asse (2). Ed in ciò furono seguiti da un noto discepolo di Platone, Eraclide Pontico, (3) il quale inoltre introdusse due notevoli innovazioni nelle idee pitagoriche, sopprimendo cioè l'ente fantastico che è l'antiterra ed abbandonando il canone della concentricità delle

(1) Cfr. il frammento dei *Mémoires sur l'histoire des hypothèses astronomiques chez les Grecs et les Romains* di Th. H. Martin, pubblicato nella 2.ª Parte (1883, p. 1-43) del T. XXX dei Mém. de l'Acad. des Inscript. et Belles-Lettres. Alcune idee ivi sostenute furono confutate dallo Schiaparelli nella memoria: *Origine del sistema planetario eliocentrico presso i Greci* (Memorie del R. Ist. Lomb., Serie III, Vol. IX, 1898), p. 89-93.

(2) Va notato che Tolomeo (*Composition mathématique*, ed. Halma, T. I, p. 19) combatte tale ipotesi senza citarne l'autore.

(3) Cfr. Hultsch, *Das astronomische System des Herakleides von Pontos* (Jahrb. für Philologie, 1896).

orbite planetarie, col fare il sole centro delle rivoluzioni di Mercurio e Venere. Ecco dunque un altro passo importante verso il sistema eliocentrico, tanto importante che nel sistema astronomico di Eraclide venne ravvisato (1) il primo schema di quello che va d'ordinario sotto il nome di Ticone Brahe. Nè va taciuto che Eraclide, in un passo su cui il Martin attrasse l'attenzione dei dotti (2), alluse anche all'ipotesi della rotazione della terra attorno al sole, ma tosto l'abbandonò, non già perchè egli la giudicasse inverosimile, ma perchè gli parve di indole esclusivamente geometrica.

Emerge da quanto precede che ben poca strada rimaneva ai Greci da compiere per giungere a concepire il moto eliocentrico dei pianeti; ed essi hanno effettivamente percorso questo tratto di cammino. Per opera di chi, è ignoto; ma è indubitato che a' tempi di Alessandro Magno era stata avvertita la possibilità di dare una spiegazione attendibile dei fenomeni celesti per mezzo di movimenti attorno al sole (3). Due nomi però vengono dagli antichi collegati a tale importante osservazione, cioè Aristarco da Samo e Seleuco di Babilonia; narrasi infatti che Cleante Stoico accusasse il primo di empietà per avere " turbato il riposo di Estia " (cioè della terra, riguardata allora, per dogma, come centro e focolare del mondo); d'altronde Plutarco nell'VIII delle sue *Questioni platoniche* scrisse: " forse che si deve intendere la terra non rimanersi fissa, come poi mostrarono Aristarco e Seleuco, il primo supponendolo soltanto, il secondo anche affermandolo? " (4). Dei due valentuomini or citati, il primo è un celebre astronomo (5) contemporaneo di Archimede (6), di cui possediamo un'opera di non piccolo valore, che esamineremo fra poco (n. 17); l'altro è un pensatore, di poco anteriore ad Ipparco, il cui

---

(1) Schiaparelli, *Come i Greci arrivarono al primo concetto del sistema planetario eliocentrico detto oggi Copernicano* (Atene e Roma, n. 2, 1898), nonchè *Origine del sistema* ecc.

(2) V. il frammento succitato, p. 25 e seg.

(3) Schiaparelli, *I precursori di Copernico*, p. 30.

(4) Cfr. anche il passo dell'*Arenario* riferito più avanti (n. 22).

(5) È uno dei pochissimi che Tolomeo ha citati (*Compos. mathém.*, ed. Halma, T. I, p. 160, 162, 163), ricordandone un'osservazione astronomica eseguita nel 281 a. C. Riguardo a lui v. Susemihl, *Geschichte der griechischen Literatur in der Alexandrinerzeit*, T. I, (Leipzig, 1891), p. 718-720.

(6) Visse intorno il 270 a. C.

nome si è conservato nella storia come quello dell' ultimo rappresentante in Occidente della dottrina del movimento della terra. Dopo di lui, per varie ragioni che lo Schiaparelli ha studiate (1) e che a noi non importa di riferire, il sistema eliocentrico venne abbandonato, sicchè lo si cercherebbe invano nelle opere di Ipparco e Tolomeo, i quali invece adottarono e sanzionarono colla loro imponente autorità il sistema degli epicicli ideato da Apollonio di Perga, sistema che sembrava più idoneo alla rappresentazione dei fenomeni celesti ed ai calcoli astronomici. Ma la presenza transitoria di esso andava qui notata: come va rilevato che gran parte delle indagini inaugurate dagli astronomi sinora ricordati, a partire da Talete, rendevano urgente di conoscere le relazioni che intercedono fra i cerchi della medesima sfera, essendo evidente che, così, grande luce sarebbesi sparsa sul modo in cui succedono i fenomeni dei quali è teatro la volta celeste. A questo stimolo, già così potente, verso lo studio della geometria sferica, altri ne aggiunsero, e non meno efficaci, le investigazioni che, con analogo intento, vennero compiute da coloro di cui stiamo per occuparci.

Idee astronomiche di Platone (2).

10. In astronomia il divino filosofo, come riguardo alle altre discipline, ebbe delle vedute d' insieme che meritano di venire onorevolmente menzionate. Va specialmente ricordato, che egli avvertì non essere l' astronomia una scienza puramente di osservazione (3),

---

(1) V. l' articolo succitato *Come i Greci ecc.*

(2) Vedi: Th. H. Martin, *Études sur le Timée de Platon*, T. II (Paris, 1841), p. 42-48, 64-66 e 75-92; inoltre *Hypothèse astronomique de Platon* (Mem. de l' Académie des Inscript. et Belles-Lettres, T. XXX, I Partie, 1881, p. 1-152); B. Rothlauf, *Die Physik Plato' s, eine Studie auf Grund seiner Werke*, II Theil (München, 1888).

(3) Lo provano i seguenti passi dell' *Epinomide:* « Ignorate voi, che è necessariamente assai savio quello che è veramente astronomo, non astronomo al modo di Esiodo, occupato cioè ad osservare il sorgere ed il tramontare degli astri, ma quello che scruta le rivoluzioni dei sette pianeti, della conoscenza dei quali è appena capace tutto il genio dell' uomo? ». « Un astronomo dev' essere il più saggio degli uomini; la sua mente dev' essere opportunamente educata sin dalla sua gioventù specialmente nei necessarî studî matematici; cioè tanto nella conoscenza dei numeri, quanto in quell' altro ramo della matematica, che, quantunque strettamente legato alla scienza del cielo, noi chiamiamo irrazionalmente *geometria*, cioè misura della terra ».

ma ne ravvisò il duplice carattere, matematico e fisico; e — conformemente all' idea che nelle scienze fisiche si è costretti ad accontentarsi della verosimiglianza, appartenendo esse al dominio dell' opinione — osservò che l'astronomia, grazie ai suoi rapporti coll'aritmetica e la geometria, è il ramo meno incerto della fisica, tanto che in certe questioni raggiunge un grado di verosimiglianza attiguo alla certezza. Prescindendo da queste e da altre analoghe considerazioni, le quali non sono prive di originalità, Platone in astronomia fu imitatore. Basta infatti leggere il *Timeo* (1) per convincersi che egli, al pari dei discepoli di Pitagora, intendeva spiegare tutti i fenomeni celesti mediante rivoluzioni esattamente circolari effettuate attorno al centro immobile della terra — cioè al centro dell'universo — con velocità costanti per ogni rivoluzione, ma differenti per ciascuno dei sette corpi mobili; i raggi delle orbite del Sole, di Venere, Mercurio, Marte, Giove e Saturno sarebbero, secondo Platone, misurate dai numeri 2, 3, 4, 8, 9, 27, preso per unità il raggio dell'orbita lunare. Di più, appoggiandosi ai risultati di osservazioni fatte dai Pitagorici, Platone propose di decomporre il movimento apparente di ciascun astro in due, entrambi circolari, uno diurno, eguale, parallelo e nello stesso senso di quello delle stelle fisse attorno all'asse dell'equatore, l'altro obliquamente contrario e molto più lento per ognuno degli altri astri attorno all'asse dello zodiaco. Questi due movimenti simultanei condussero Platone a considerare una trajettoria elicoidale (2), segnalando la quale il grande filosofo introdusse, benchè sotto forma vaga, il concetto di *curva spirale* (3) (ἕλικα; cf. L. I, n. 61), concetto che era destinato a prendere un posto stabile nella geometria, benchè non abbia ancora raggiunto quella precisione che deve possedere qualunque idea matematica (4).

Ai concetti astronomici ora schizzati, Platone si attenne durante gran parte della sua vita, chè se ne rinvengono tracce tanto

(1) Cfr. Martin, *Études sur le Timée de Platon* (Paris, 1841).

(2) Cfr. *Comméntaire de Théon* (ed. Halme, T. I, p. 17).

(3) Cfr. Teone Smirneo, ed. Dupuis, p. 328. V. anche V. A. Sédillot, *De l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon* (Comptes rendus etc., 7 Dicembre 1872).

(4) Veggasi infatti l' articolo *Spirale* scritto dal d' Alembert per l' *Encyclopédie méthodique*, nonchè gli articoli *Radiale* e *Spirale* del *Dictionnaire des mathématiques* del Montferrier.

negli scritti anteriori al *Timeo,* quanto nelle *Leggi* pubblicate da Filippo Opunzio e nell' *Epinomide;* d'altronde l'importante problema geometrico da lui proposto " quali sono i movimenti circolari ed uniformi che possono soddisfare ai fenomeni offerti dalle rivoluzioni planetarie? (1), " basta a dimostrare come egli si conservasse per gran tempo fedele ai canoni posti dal grande filosofo di Samo. Tuttavia sembra che Platone, verso il termine della propria vita, presa cognizione delle ipotesi originali formulate da Filolao e dai Pitagorici posteriori, accogliesse le nuove idee sul movimento della terra; anzi, arrivasse a convincersi siffattamente dell'esistenza di tal movimento da dichiararne l'opinione contraria ingrata agli Idî ed appena perdonabile alla debolezza degli uomini che non partecipano all'intelligenza divina (2). Malgrado questa recisa affermazione, i discepoli ed i successori di Platone nella direzione dell'Accademia preferirono il primo sistema astronomico di Platone: bastino a provarlo Filippo Opunzio e Senocrate, personaggi che non meritano più di questo cenno in una storia dell'astronomia.

11. Poichè — come a più riprese dicemmo — Platone ha sparso con profusione nelle sue opere delle allusioni a concetti matematici, l'intelligenza di esse riesce difficile a coloro che di tali scienze sono affatto digiuni; onde è spiegabile come, nell'epoca dei commentatori, sia apparso un ammiratore del sommo filosofo, il quale ritenne opportuno compilare un esposizione metodica *Delle cognizioni matematiche utili per le lettura di Platone:* è desso Teone da Smirne.

Tutti certamente converranno — egli dice nell'esordio del suo discorso — non essere possibile comprendere quello che Platone scrisse intorno alle matematiche se non ci si è dedicati allo studio di esse. Egli stesso ha mostrato in parecchie occasioni come tale conoscenza non sia inutile nè senza frutti per le altre scienze. Epperò dev'essere tenuto per fortunato colui che, nell'accostarsi agli scritti di Platone,

---

(1) Secondo Gemino (*Isagoge,* Cap. I) l'origine di tal questione trovasi nella scuola dei Pitagorici, chè questi dicevano: « Pei corpi divini ed eterni non si può supporre che essi vadano ora più presto e ora più adagio e che ora si fermino. Poichè neanche in una persona giudiziosa ed equilibrata si trovano tali anomalie nel modo di andare. È vero che i bisogni della vita possono dare occasione agli uomini di camminare ora più presto ed ora più adagio; ma per le stelle inalterabili non vi può essere alcuna causa di variabilità nella velocità ». In base a tali considerazioni i Pitagorici domandavano una rappresentazione dei fenomeni celesti col mezzo di movimenti non soltanto circolari, ma anche uniformi.

(2) Schiaparelli, *I precursori di Copernico,* p. 22.

possiede bene tutta la geometria, e tutta la musica e l'astronomia. Ma sono queste cognizioni il cui acquisto non è ràpido, nè facile; al contrario esige un lavoro assiduo sino dalla più tenera età. Nel timore che coloro i quali non ebbero la possibilità di coltivare le matematiche e che pur desiderano conoscere gli scritti di Platone non siano astretti a rinunciarvi, noi diamo qui un sommario ed un riassunto delle nozioni necessarie, e la traduzione dei teoremi matematici più utili su l'aritmetica, la musica, la geometria, la stereometria e l'astronomia, scienze senza cui è impossibile di essere perfettamente felici, come egli (Platone) dice, dopo di avere lungamente dimostrato che non si devono trascurare le matematiche.

Teone divise la sua opera in cinque sezioni dedicate rispettivamente all'aritmetica, alla geometria (piana), alla stereometria, all'astronomia ed alla musica, ritenendo però che delle tre parti di questa — teoria dei suoni, musica istrumentale ed armonia delle sfere celesti — la seconda fosse da escludersi, avendo Platone detto che " non si devono tormentare le corde degli strumenti come curiosi che stiano ad ascoltare „. Di esse sezioni andarono perdute quelle concernenti la geometria, del piano e dello spazio, e la musica celeste; fra le superstiti (1) vennero pubblicate dal Bulliaud quelle relative all'aritmetica ed alla musica (2), più tardi di nuovo l'aritmetica dal Gelder (3), e da Th. H. Martin l'astronomia (4); il tutto venne edito dal Hiller (5) ed in seguito dal Dupuis (6).

Chi fosse Teone non è noto; nemmeno si conoscono gli anni estremi della sua esistenza. Per determinare almeno approssimativamente l'epoca in cui visse, non si ha che ad osservare essere egli colui che Teone Alessandrino, nel commento al IX Libro dell' *Almagesto,*

---

(1) Il Cantor (*Vorl.* T. I, p. 405 della 2ª ed.) opina che esse compongono tutto quello che Teone ha scritto; opinione questa che condividono pienamente E. Hiller, il recente editore di Teone, e P. Tannery (v. *Bulletin des Sc. math.*, 1893, I Parte, p. 282).

(2) *Theonis Smyrnaei Platonici, Eorum quae in mathematicis ad Platonis lectionem utilia sunt Expositio. Opus nunc primum editum ab Ismaele Bullialdo* (Lutetiae Parisiorum, 1644).

(3) *Specimen Academicum inaugurale, exhibens Theonis Smyrnaei arithmeticam* (Lugduni Batavorum, 1827).

(4) *Theonis Smyrnaei Platonici Liber de Astronomia cum Sereni fragmento* (Parisiis, 1849).

(5) *Theonis Smyrnaei, philosophi platonici, expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium* (Lipsiae, 1878).

(6) *Théon de Smyrne, philosophe platonicien, Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon, traduite pour la première fois du grec en français par* J. Dupuis (Paris, 1892). Continueremo a citare questa opera coll' abbreviazione: Teone Smirneo, ed. Dupuis.

indica coi nomi Θέων παλαιός e Θέων παλαιός μαθηματικός, e tener conto di coloro che sono nominati nella sua opera (1). Ora fra questi s'incontrano i più antichi pensatori greci, quali Talete, Anassimandro, Anassimene, Pitagora, Oinopide, Archita, Ipparco, Filolao, Empedocle, un Laso d'Ermione, contemporaneo e discepolo d'Ippaso, e Lisia, che appartiene all'epoca di Demostene; si trovano poi Platone con Eudosso, Eudemo, Menecmo, Calippo ed Evandro, che nel III. Sec. a. C. tenne la direzione dell'Accademia, quindi Aristotele con i discepoli Aristosseno e Dicearco, nonchè Archimede, Eratostene, Ipparco (180-125 a. C.) e Posidonio (I. Sec. a. C.). Non arrestandoci su un certo Ibico, tragico ignoto, su Timoteo, lirico del IV. Sec. a. C., e su un Erofilo ('Ηρόφιλος), personaggio totalmente sconosciuto, va notata la presenza dei nomi di Alessandro d'Etolia, poeta didascalico non molto anteriore ad Augusto, del filosofo pitagorico e platonico Trasillo (e del suo contemporaneo Dercillide) favorito di Augusto e Tiberio (2), e di Adrasto da Neapolis — la principal fonte a cui attinse Teone nello scrivere la parte astronomica del suo commento —, che visse tra Nerone e Commodo (180-192 dell'E. v.) (3). E poichè nei libri IX e X dell'*Almagesto* sono riferite delle osservazioni fatte da Teone su Venere e Mercurio tra il 128 ed il 132 dell'E. v. (4), così si può asserire che questi è anteriore a chi scrisse il sommo codice astronomico dell'antichità; ora essendo Tolomeo vissuto tra l'anno 87 ed il 165 dell'E. v., sembra legittima la conclusione che lo Smirneo sia stato di poco anteriore, o fors'anche contemporaneo a Tolomeo, che appartenga per tanto alla prima metà del II. Sec. dell'era nostra.

12. Della parte aritmetica del commento di Teone verrà discorso nel Libro V. (nn. 34 e 35) dell'opera presente; qui ci occuperemo di quanto si riferisce all'astronomia, notando però prima che da essa abbiamo già tratte molte ed importanti notizie relative al

---

(1) Cfr. Th. H. Martin, *De Theonis Smirnaei Astronomia Dissertatio*, premessa all'edizione dianzi citata.

(2) Th. H. Martin, *Sur quatre personages appelés Thrasylle* (Annali di Scienze matematiche e fisiche, T. VIII, 1857, p. 423-428).

(3) Il lavoro di Adrasto Περί τε ἁρμονίας παί συμφωνίας, ricordato da Teone (ed. cit. p. 82) esiste manoscritto in qualche biblioteca italiana (v. la *Dissertatio* del Martin, pag. 76).

(4) Nesselmann, *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842), p. 224.

primo stadio di sviluppo dell'astronomia greca, ed altre ancora attingeremo; perciò il còmpito nostro in questo momento si può limitare a porgere una idea dell'andamento generale dell'opera dello Smirneo.

La quale comincia con una esposizione delle ragioni per cui si considera la terra come sferica e posta nel centro dell'universo. Da essa si apprende poi quali siano e quali nomi portino i circoli che si sogliono considerare nella sfera celeste. L'autore passa quindi a le stelle ed i varî pianeti, facendo conoscere l'ordine in cui questi si succedono ed il concerto cui danno luogo; commentata una favola che Platone espose al termine della sua *Repubblica,* Teone si volge a considerare il moto dei pianeti in generale e quindi quello del sole, arrestandosi sulla considerazione del cerchio eccentrico e del cerchio epiciclo, ed avvertendo che " Ipparco vantò l'ipotesi dell'epiciclo come sua propria (1) „; però egli fece osservare " essere degna dell'attenzione del matematico la ricerca delle spiegazioni degli stessi fenomeni mediante ipotesi differenti, quali sono quella dei circoli eccentrici e quella dei cerchî concentrici e degli epicicli (2) „. Secondo la prima teoria si ammette che, ad esempio, il sole descriva un circolo non concentrico alla terra, e si giunge così ad una spiegazione soddisfacente delle irregolarità che presenta il movimento di quell'astro; accettando la seconda invece si considera bensì circolare la trajettoria dell'astro, ma si ammette che il suo centro, invece di essere fisso, descriva un circolo concentrico alla terra, e si arriva così alle medesime conclusioni. Non arrestiamoci a misurare il valore dei due conseguenti edifici astronomici (3), che la scienza moderna ha già atterrati, ed osserviamo invece che, dopo, Teone passa ad esporre quanto si sapeva ai suoi tempi intorno a le cogiunizioni, le occultazioni e le eclissi (sia in genere, sia che si tratti del sole o della luna); dopo un breve intermezzo sulla storia dell'astronomia (tolto da Eudemo) fa note alcune generalità intorno alle ipotesi dell'astronomia.

Tutto questo, dice finendo Teone, era necessariissimo ed utilissimo per la lettura delle opere di Platone. Ora, noi dicemmo che dovevamo considerare la musica istru-

(1) Teone Smirneo, ed. Dupuis, p. 305.

(2) Id. p. 269.

(3) Siamo in certo modo autorizzati a tale silenzio dell'essere stata tal misura effettuata dal Whewell. *History of inductive Sciences*, T. I (London, 1837), p. 179.

mentale, la musica matematica e l'astronomia delle sfere e che avremmo riferito tutto quello che vi è necessariamente d'armonia nel mondo, dopo quanto concerne l'astronomia — perchè Platone assegna a questa musica delle sfere il quinto posto nelle matematiche, dopo l'aritmetica, la geometria la stereometria, e l'astronomia —; perciò noi ora mostreremo sommariamente quanto Trasillo espose sopra tale argomento, ed in pari tempo il nostro lavoro anteriore.

Ma qui ha termine quanto esiste tuttora del lavoro di Teone; e qui noi pure ci arresteremo: non senza avere notato che tale scritto ha dal punto di vista matematico assai scarsa importanza: ed è appunto perchè noi riteniamo che l'unico suo pregio consiste nell'essere una illustrazione delle idee di Platone che, facendo uno strappo all'ordine cronologico, da noi sempre osservato, abbiamo spesa qualche parola intorno ad esso in questo momento. Ma dopo questa digressione riprendiamo il filo del nostro discorso.

Le sfere omocentriche di Eudosso da Cnido.

13. Se Platone non contribuì con opere proprie a far compiere notevoli progressi all'astronomia, però, analogamente a quanto vedemmo per la geometria (L. I. n. 55), collaborò indirettamente al perfezionamento di essa, specialmente col proporre quell'interessante problema meccanico-geometrico di indole prettamente pitagorica, di cui riferimmo l'enunciato nel n. 10 e che per tanti secoli venne così altamente pregiato (1). Il primo che, per quanto ci è noto, si è accinto alla magnanima impresa di scioglierlo è un eminente geometra che già conosciamo (L. I. n. 69-73), Eudosso da Cnido. E tal successo ebbero i suoi sforzi, che il " sistema delle sfere omocentriche ", in cui risiede la sua soluzione, fu presso gli antichi uno dei più potenti veicoli alla diffusione ed al consolidamento della sua fama ed oggi ancora lo addita come uno dei pensatori più forti ed originali che abbia prodotto il suolo dell'Ellade (2).

---

(1) V. un passo dell'*Almagesto* (Cap. II del IX Libro), ove Tolomeo pone fra le benemerenze di Ipparco l'avere spiegati tutti i fenomeni che presentano il sole e la luna appunto con movimenti circolari ed uniformi opportunamente combinati.

(2) Nell'esporre il sistema astronomico di Eudosso ci atteniamo alla celebre restituzione fattane dallo Schiaparelli (*Le sfere omocentriche di Eudosso, di Calippo e di Aristotele*, Milano, 1875), al quale, ancor più che all'Ideler (*Ueber Eudoxus, II Abhan-*

Egli pose come fondamento alla soluzione del problema di Platone i due principî, che tutto il mondo degli astri dovesse essere governato da una legge generale unica, e che all'universo dovesse attribuirsi una forma simmetrica e la più semplice possibile; ne dedusse che gli astri devono muoversi sopra tante sfere aventi tutte per centro il centro della terra: donde il nome che venne dato al sistema eudossiano. Si vede subito che i criterî prescelti da Eudosso, mentre davano all'universo somma eleganza e perfetta simmetria, rendevano la soluzione del problema di Platone assai più difficile di quello che sarebbe stato ove egli si fosse riserbato di disporre di qualche movimento diverso da quello di una sfera attorno al proprio centro.

14. Per completare il congegno del proprio sistema, Eudosso, imitando Platone, immaginò che ogni astro fosse portato in circolo da una sfera girevole attorno a due poli e dotata di un moto rotatorio uniforme, suppose inoltre che l'astro fosse attaccato ad un punto dell'equatore di questa sfera in modo da descrivere durante la rotazione un circolo massimo posto nel piano perpendicolare all'asse di tale rotazione. E siccome queste ipotesi non bastavano ancora a rendersi conto di tutti i fenomeni celesti, così Eudosso fu indotto ad ammettere che ogni pianeta fosse dotato ad un tempo di parecchi movimenti analoghi a quel primo, i quali, componendosi, producessero il moto effettivamente osservato. In conseguenza egli stabilì che i

---

dlung, in Abh. d. k. Acad. d. Wiss. zu Berlin, hist.-phil. Klasse, 1830, Berlin 1832) ed all'Apelt (*Die Sphärentheorie des Eudoxus und Aristoteles.* Abh. der Frie'schen Schule, II Th., 1849, p. 27-49), il capo della scuola di Cizico è debitore dell'essere le sue idee non giudicate più con lo spregio e lo scherno adoperati durante il secolo passato. Le idee dello Schiaparelli furono accolte e sviluppate in lavori posteriori, fra cui meritano una menzione speciale: Tannery, *Note sur le système astronomique d'Eudoxe* (Mém. de la Soc. de Bordeaux, II Serie, T. I, 1876, p. 441-449) e *Seconde note sur le système etc.* (Id. T. V. 1883, p. 129-147); Th. H. Martin, *Mémoire sur les hypothèses astronomiques d'Eudoxe, de Calippe et d'Aristote* (Mem. de l'Acad. des Inscriptions et Belles-Lettres, T. XXX, 1e Partie, 1881, p. 153-302); H. Künssberg, *Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxus von Knidos,* I. Theil (Dinckelsbühl, 1888).

Del sistema eudossiano parla Teone Smirneo (ed. Dupuis, p. 287 e seg.), ma riferendosi a quanto ne scrisse Aristotele. L'opera in cui Eudosso lo espose non può essere quella che Ipparco citò (*Hipparchi in Arati et Eudoxi Phaenomena Commentariorum,* ed. Manitius, Lipsiae 1894, p. 8) e Arato versificò. Forse è quella *Sulla velocità* (Περὶ ταχῶν) di cui non è superstite che il titolo.

poli della sfera portante il pianeta fossero trascinati da una sfera più grande concentrica alla prima e girante con velocità uniforme intorno a due poli differenti dai primi. E siccome neanche ciò bastava a rappresentare i moti di tutti i sette astri, così l'astronomo di Cnido attaccò i poli della seconda sfera sopra una terza concentrica alle prime due e maggiore di esse, la quale egli fece ruotare attorno ai propri poli con una velocità determinata. Così ottenne un' attendibile spiegazione dei moti apparenti del Sole e della Luna; ma per ciascuno degli altri astri (Saturno, Giove, Marte, Mercurio, e Venere) gli fu necessario di introdurre una quarta sfera comprendente entro di sè le tre prime e rotante uniformemente intorno a due poli. Ottenne così, entro le sfere delle stelle fisse, una totalità di $(2 \times 3 + 5 \times 4 =)$ ventisei sfere; le quali — checchè abbiano asserito i detrattori di Eudosso — erano, con ogni probabilità, concepite da lui come enti ideali, introdotti soltanto come ausiliari geometrici per ottenere la rappresentazione desiderata dei fenomeni celesti. Che così si conseguisse l'intento di rappresentare l'anomalìa solare dei pianeti (cioè quella massima irregolarità del loro corso, di cui gli effetti più salienti sono i noti fenomeni delle stazioni e delle retrogradazioni), è conseguenza delle considerazioni che ora passiamo ad esporre succintamente.

15. Delle quattro sfere assegnate a ciascun pianeta, la *prima* (cioè la più esterna) serviva, secondo Eudosso, a produrre il moto diurno, mentre alla *seconda* era dovuta la rivoluzione dei pianeti lungo l'eclittica; ed alla *terza* ed alla *quarta* era riserbato il cómpito di rappresentare l'anomalia solare ed il movimento in latitudine. Secondo il citato filosofo, la rivoluzione della prima sfera è uguale a quella delle sfere fisse; il periodo della seconda eguaglia invece quello della rivoluzione zodiacale dell'astro; finalmente le ultime due si muovono in sensi opposti con periodi eguali alla rivoluzione sinodica. Se si astrae, per un momento, dall'azione locomotrice esercitata sull'astro dalle due prime sfere, si vede che la questione di determinare la natura del moto dell'astro si riduce al seguente problema:

" Intorno al diametro fisso AB si aggira con moto uniforme una sfera portante due poli opposti P, intorno ai quali ruota con velocità costante una seconda sfera con periodo eguale e con movimento contrario. Determinare la via percorsa da un punto M della seconda sfera equidistante dai poli di essa ".

Lo studio di tale questione si può fare con mezzi elementari (Schiaparelli), o col sussidio della trigonometria sferica (Tannery), oppure col metodo delle coordinate (Künssberg). Esso conduce a concludere che il movimento indicato è periodico e dura quanto il moto delle due sfere e che la sua trajettoria è una curva simmetrica rispetto ad un certo piano passante per AB, il quale può dirsi, grazie alla parte importante che rappresenta, *piano fondamentale.* Si dirà poi *piano diametrale* quello che passa pel diametro AB ed è perpendicolare al piano fondamentale, e *piano ortogonale* quello condotto pel centro perpendicolarmente ad AB. Chiamisi poi *inclinazione* la distanza (sferica) costante AP ed *argomento* l'angolo AOP uniformemente variabile; detta i la prima e θ la seconda di queste quantità, e x ed y i rapporti tra il raggio della sfera e le distanze del pianeta dal piano diametrale del piano fondamentale, si trovano le equazioni:

$$x = \operatorname{sen} i \cos \theta, \quad y = -\operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} 2\theta,$$

le quali, assieme all'equazione della sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

individuano la trajettoria rispetto ad un sistema di coordinate avente per elementi di riferimento i piani fondamentale, diametrale ed ortogonale.

Per caratterizzare geometricamente la trajettoria stessa, si noti che essa è la curva comune ad una sfera, ad un cilindro circolare retto ad essa tangente e ad un cono di rivoluzione; si vedrà così che essa altro non è che una quartica gobba di prima specie con un punto doppio. L'essere tale curva definibile in tre modi differenti come intersezione di due superficie note, rivela l'analogia che essa possiede con quella impiegata da Archita, maestro di Eudosso, per risolvere il problema di Delo (L. I. n. 51-52), si giunge così in possesso di un nuovo argomento per ritenere conforme al vero la restituzione del sistema eudossiano suggerita dallo Schiaparelli. — Un'altra conferma si ottiene osservando che il moto dell'astro risulta, in forza di quanto precede, di rotazione anche attorno agli assi del cilindro e del cono, sicchè questi moti sono pure " regolari ed ordinati " quali erano quelli da impiegarsi per risol-

vere il problema di Platone. — Si noti da ultimo che la projezione della trajettoria ottenuta sul piano xy ha per equazione il risultato dell'eliminazione di z tra due delle equazioni precedenti, cioè:

$$x^4 = x^2 \operatorname{sen}^2 i - 4y^2 \cos^4 \frac{i}{2};$$

la projezione stessa è dunque una di quelle curve che, in tempi assai più recenti, vennero considerate da G. di S. Vincenzo sotto il nome di " parabole virtuali " (1); ora tale curva è di forma somigliante alla lemniscata del Bernoulli e ciò spiega il perchè Simplicio (2) dia alla curva di Eudosso il nome di *ippopeda,* dal momento che tal nome (ἱπποπέδη) veniva attribuito dai Greci (3) alle linee (in forma di 8) che facevansi percorrere ai cavalli per costringerli ad alternate conversioni dal lato destro e dal sinistro, linea che, a quanto afferma Proclo, era mista (cioè ne retta nè circolare), segante sè stessa e per forma simile alla spirica (cfr. L. I, n. 74) ottenuta segando la superficie di un toro con un piano tangente parallelo all'asse della superficie.

16. Finora restringemmo le nostre considerazioni a due sole sfere omocentriche per semplificare il ragionamento e mettere in piena luce le importanti contribuzioni arrecate alla geometria da Eudosso coll'introdurre nella scienza una nuova e notevolissima curva a doppia curvatura, quella che può collo Schiaparelli chiamarsi *lemniscata sferica* e che altri denomina *ippopeda di Eudosso.* Ma per completare le indicazioni sul sistema delle sfere omocentriche bisogna che teniamo conto dei movimenti di tutte quattro le sfere, vale a dire dobbiamo immaginare che i poli A, B siano appoggiati sulla seconda sfera di Eudosso e percorrano l'eclittica in un tempo eguale alla rivoluzione zodiacale del pianeta. Supponendo che il circolo fondamentale (sezione della sfera su cui sta l'ippopeda col piano fondamentale) coincida costantemente col piano dell'eclittica, il punto O (centro della lemniscata sferica) si troverà sopra questa, e l'asse della curva apparterrà al piano di essa. Il

(1) *Opus geometricum* (Antverpiae, 1647).

(2) Brandis. *Scholia in Aristotelem* (Berolini, 1836) p. 498-504. Il brano si trova tradotto in italiano dallo Schiaparelli (*Le sfere* ecc. p. 53-63).

Cfr. (3) Proclo ed. Friedlein p. 112, 127 e 128.

punto *O*, al pari dei punti *A*, *B*, descriverà con moto uniforme, durante una rivoluzione zodiacale, tutto il circolo dell'eclittica; sicchè potremo, senza turbare il movimento del pianeta, surrogare alla considerazione delle sfere terza e quarta quella della lemniscata sferica. Componendo il moto del pianeta sulla lemniscata con quello della lemniscata stessa si otterrà un movimento capace di far giungere il pianeta due volte ai limiti boreali e due agli australi, non senza fargli attraversare quattro volte l'eclittica, capace cioè di fargli compiere un movimento quale è quello che si presenta dall'osservatore.

Tale è probabilmente la soluzione suggerita da Eudosso pel problema di Platone. Quanto ingegno esigesse il concepirlo e quanto sapere geometrico supponesse non è chi non veda; onde il sistema delle sfere omocentriche dovette apparire ed apparve ai contemporanei di Eudosso, quello che realmente è, cioè una delle concezioni più geniali e grandiose che lo spirito umano abbia prodotte; e poichè per seguirne tutti i particolari è necessario grande famigliarità con le figure a tre dimensioni e con la combinazione dei movimenti, così è probabile che Eudosso siasi servito, come ausiliare, di uno di quei meccanismi, la costruzione dei quali era affidata all'antica sferopea (cfr. n. 3).

Le sfere di Calippo e di Aristotele.

17. Il sistema delle sfere omocentriche venne accuratamente studiato nella scuola di Cizico da Menecmo (v. L. I, n. 74) e Polemarco, senza però subire ivi modificazioni rilevanti. Ma più tardi l'astronomo Calippo, migliore osservatore del matematico Eudosso, avvertì la necessità di portare a 34 il numero delle sfere mobili ausiliari, aggiungendone una tanto per Marte quanto per Venere e Mercurio, e due pel sole e per la luna. Tale emendamento fu dal suo inventore sottoposto al giudizio di Aristotele (durante un viaggio ad Atene all'uopo intrapreso assieme a Polemarco), e combattuto da Autolico da Pitana (cfr. più avanti n. 26) in uno scritto contro Aristosseno, oggi perduto, del quale Simplicio conservò memoria in uno squarcio da noi già citato (v. n. 15). Il risultato di quella conferenza astronomica è ignoto; ma ciò che è certo si è che il filosofo di Stagira accordò in massima la sua approvazione alle idee di

Eudosso, modificandole però dal canto suo in un senso che importa rilevare.

Mentre Eudosso e Calippo consideravano l'investigazione dei fenomeni celesti esclusivamente nel senso geometrico indicato da Platone, epperò prescindevano affatto dalle condizioni meccaniche del problema (costituzione delle sfere mobili ed artifici regolatori dei loro movimenti), Aristotele si occupò di connettere in un tutto bene organizzato l'intera serie dei movimenti, rendendo le sfere inferiori dipendenti dalle superiori. E credette risolverlo collegando insieme tutte le sfere proposte da Calippo; per evitare poi che i movimenti degli astri superiori agli inferiori si comunicassero, egli dopo l'ultima e più interiore sfera (*deferente*) di ciascuno pianeta e prima della sfera più esterna del pianeta immediatamente inferiore intercalò un certo numero di nuove sfere (*reagenti*). Così la luna ebbe 5 deferenti e nessuna reagente; Saturno e Giove ciascuno 4 deferenti e 3 reagenti; Marte, Mercurio, Venere ed il Sole 5 deferenti e 4 reagenti: in totale si otteneva così 55 (1) sfere, oltre a quella delle stelle fisse.

Il sistema di Aristotele è, come si vede, molto complicato, lo è anzi più di quanto sia strettamente necessario, perchè fu notato che lo stesso scopo prefissosi dallo Stagirita può conseguirsi con 6 sfere di meno (2). Sia in causa di tale complicazione, sia per altre cagioni che non ci importa indagare, il sistema delle sfere omocentriche di Aristotele ebbe breve vita; i Greci lo abbandonarono e, benchè molti secoli dopo sia stato ripreso sott'altro cielo (3), si può dire che la sua azione sui progressi dell'astronomia sia stata nulla. Che altrettanto possa dirsi della sua influenza sulla sferopea è poco probabile, ma niun documento abilita ad affermare e tanto meno a misurare tale ipotetico benefico influsso. Laonde nessuna ragione ci consiglia a trattenerci ulteriormente sopra questo argomento; nè altri la Grecia produsse, all'infuori di quella che adottarono più tardi Ipparco e Tolomeo.

---

(1) Questo numero si ritrova nel *quaternario* di cui Platone parla nel *Timeo* e che si compone delle due serie 1, 2, 4, 8 e 1, 3, 9, 27.

(2) Schiaparelli l. c. p. 49.

(3) Veggasi l'opera *Homocentricorum seu de stellis*, di Fracastoro (1483-1553) pubblicata la prima volta a Venezia nel 1538.

I Cicli Cronometrici.

18. I sistemi cosmologici ideati dai Greci possono indirettamente servire come criterio misuratore del numero e dell'esattezza delle osservazioni astronomiche da essi compiute. Ma vi è ancora un altro ordine di dati che può disimpegnare il medesimo ufficio, fors' anche con precisione maggiore, cioè i procedimenti che vennero successivamente adoperati per misurare e dividere il tempo (1).

Non intendiamo di arrestarci a descrivere il modo in cui venivano determinate le varie fasi della giornata; soltanto ricordiamo che lo strumento a tal fine adoperato era il gnomone, la cui introduzione in Grecia è attribuita ad Anassimandro, e le cui applicazioni non cessarono nemmeno quando il meccanico Ctesibio, un secolo a mezzo a. C., insegnò la costruzione degli orologi.

In origine i Greci adoperavano *mesi lunari*, ognuno dei quali comprende il periodo di tempo necessario affinchè la luna passi successivamente per tutte le sue fasi (2). Avendo poi osservato come, dopo circa dodici mesi lunari, le stagioni (che in origine erano due sole, *estate* ed *inverno*) si ripresentano nello stesso ordine, se ne compose un nuovo periodo (luni-solare), l'*anno,* regolatore delle feste periodiche. Questa modificazione è di somma importanza, perchè attesta che si vide allora essere

> Lo ministro maggior della natura
> Che. . . . .
> . . . col suo lume il tempo ne misura.

Però, dopo poche applicazioni dell' anno luni-solare, si avvertì un disaccordo tra il presentarsi delle stagioni e l'epoca prefissata alle feste, e vi si portò rimedio coll'introduzione dell' anno bisestile, che venne effettuata in epoca remotissima (però dopo Omero ed Esiodo), ma regolata in modo stabile soltanto all'epoca di Solone (VI Sec.

(1) Per ulteriori informazioni si ricorra al *Lehrbuch der mathematischen und technischen Chronologie* (Berlin, I ed. 1825, II ed. 1883) dell' Ideler; e al T. I (London, 1837) dell' *History of inductive Sciences* del Whewell.

(2) Cfr. Teone Smirneo (ed. Dupuis) p. 170, linee 6-11.

a. C.). Al quale si fa risalire il costume di comporre ogni anno comune di 12 mesi alternativamente di 30 e 29 giorni; l'anno bisestile invece comprendeva un tredicesimo mese di 30 giorni. Ogni anno comune era seguito da un bisestile e formava con esso un ciclo biennale o *trieteride* di 738 giorni. Tale sistema implica quindi che l'anno sia in media di 369 giorni; la differenza, assai notevole, fra tale lunghezza e la durata reale doveva ben presto manifestare un disaccordo tra le date ed i fenomeni, ed Eudosso ne diede la spiegazione insegnando (dopo il 387 a. C.) ai Greci l'anno egiziano di giorni 365 $^1/_4$. Per ovviare a quell'inconveniente s'introdusse, a quanto riferisce Censorino, un periodo quadriennale o *tetraeteride* di 1461 giorni, o, secondo l'attestazione di Gemino, uno di otto anni o *ottaeteride* di 2922 distribuiti in 99 mesi (1). Ma anche questa concezione coll'andar del tempo doveva manifestarsi insufficiente. D'altronde, sin dal V. Sec. a. C., un Ateniese che ora gode fama mondiale, Metone, propose (432 a. C.) il ciclo di 235 mesi lunari o 19 anni solari, per rappresentare il lasso di tempo necessario affinchè la terra, la luna ed il sole riprendano le loro posizioni rispettive (2); in base a questo concetto egli costruì un calendario il quale ebbe virtù di fare accettare le sue idee da tutta la Grecia. Se non che anche il *ciclo di Metone* aveva delle imperfezioni che ulteriori osservazioni rivelarono; infatti, un secolo dopo, il Ciziceno Calippo scopriva (330 a. C.) che esso faceva l'anno solare un 76° di giorno più lungo del vero, e proponeva (330 a. C.) la considerazione di un ciclo di 27759 giorni ripartiti in 76 anni, ciclo di grande esattezza che oggi ancora porta il nome di chi lo concepì. Un ulteriore perfezionamento — l'ultimo che dobbiamo riferire — fu operato da Ipparco (3); il quale, avendo notato che Calippo fece l'anno tropico più lungo del vero di circa la 300ª parte di un giorno, suggerì

(1) Anche questo periodo venne insegnato ai Greci da Eudosso da Cnido in uno scritto, oggi perduto, intitolato appunto *Sull' ottaeteride*. (cfr. Böckh, *Ueber die vierjahrigen Sonnenkreis der Alten, vorzüglich den Eudoxischen*, Berlin, 1863). Secondo l'Ideler (op. cit., T. II, p. 607) il periodo di otto anni sarebbe stato stabilito avanti quello di due.

(2) È ignota la considerazione che guidò Metone al ciclo di 19 anni; forse egli si servì delle eclissi già osservate.

(3) V. l'opera oggi perduta *Sopra i mesi ed i giorni intercalari* (Περὶ ἐμβολίμων μηνῶν τε καὶ ἡμερῶν).

la considerazione di un ciclo di 111035 giorni divisi in 304 anni. La conformità dei fenomeni celesti al principio ed alla fine di questo periodo è così perfetto, che l'*annus Hipparchi*, come Censorino lo chiama, è un periodo capace di soddisfare le esigenze di un'astronomia anche più avanzata di quella che si rispecchia nell'*Almagesto* di Tolomeo; nulla di sorprendente adunque se esso segna il punto culminante della cronologia astronomica dei Greci (1).

L'Astronomia come Scienza di misura.

19. Fa ora d'uopo che ritorniamo ad Aristarco di Samo (cfr. n. 9) per esaminare l'opera superstite di questo scienziato *Sulle grandezze e le distanze del sole e della luna* (περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης) (2), la quale, se pei risultati definitivi che contiene non merita più un posto nella biblioteca di un astronomo (3), pel suo indirizzo prettamente geometrico è degna di tutta la considerazione dello storico e di profondo studio da parte del matematico. Giacchè la somma di cognizioni matematiche ivi adunata e la rigorosa concatenazione logica delle sue parti la fanno giudicare non indegna di figurare a lato delle opere che, come essa, furono prodotte durante il periodo aureo della geometria greca (4).

Quali fondamenti al proprio argomentare, Aristarco pone le sei ipotesi seguenti:

(1) Un altro ciclo di 2434 anni, suggerito da Aristarco, sembra abbia incontrato poco favore; esso è ricordato da Censorino in un passo che P. Tannery di recente ha ricondotto alla vera lezione. V. la memoria *Le grande année d'Aristarque de Samos* (Mem. de la Soc. de Bordeaux, 3ª Série, T. IV, 1888, p. 79-96).

(2) Si trova, in greco ed in latino, nel III Vol. delle *Opere* di Wallis (1699), in greco ed in francese nell'*Histoire d'Aristarque de Samos* par M. de F.*** (Fortia d'Urban?) (Paris, 1810). Vedremo (n. 22) che il problema ivi trattato era stato, almeno in parte studiato dianzi da Feidia (L. II, n. 32).

(3) Tuttavia è esagerazione l'affermare che « il est fâcheux pour sa (cioè di Aristarco) mémoire que ce livre nous ait été conservé en entier » (Delambre, *Hist. de l'astr. anc.*, T. I, Paris 1817, p. 75).

(4) Va notato essere opinione del Tannery che Aristarco non abbia fatto che dar forma scientifica a dei metodi di cui l'inventore sarebbe Eudosso da Cnido. V. l'articolo *Aristarque de Samos* (Mem. de la Soc. de Bordeaux, 2e Série, T. V, 1884, p. 237-258) e *Science hellène* p. 56, nota.

I. La luna riceve la propria luce dal sole. II. La terra si può considerare come un punto rispetto alla sfera lunare. III. Quando la luna ci appare dimezzata, il circolo di separazione delle due parti ha il proprio piano passante pel nostro occhio. IV. Allora la distanza angolare del sole dalla luna è 87°. V. L'ombra projettata dalla terra è in larghezza eguale a due diametri lunari. VI. La grandezza apparente della luna è la quindicesima parte del segno, cioè (1) due gradi.

Non è còmpito nostro il discutere questi canoni; soltanto osserveremo che, sin dal tempo di Pappo (2), si consideravano come falsi il V. ed il VI (3); quanto al IV, in base alle osservazioni più recenti, si sostituisce 89° 50' a 87.° Riguardo al procedimento che segue Aristarco — il quale chiamasi tuttora " metodo della dicotomia di Aristarco " —, rileveremo anzitutto che egli, ben vedendo l'impossibilità di determinare con esattezza le grandezze e le scambievoli distanze degli astri considerati, si contentò di assegnare dei limiti fra cui sono compresi i mutui rapporti delle une e delle altre.

20. Il primo di questi limiti è insegnato dalla Prop. VIII, la quale dice: " il rapporto delle distanze della terra dal sole e dalla luna è compreso fra 18 e 20 ". Per dimostrarlo Aristarco osserva che quando la luna ci appare dimezzata, essa determina col sole e la terra un triangolo di cui è retto l'angolo che ha il vertice nella luna e di 87° (ipotesi IV) quello che ha per vertice la terra; di tale triangolo è pertanto conosciuta la forma, epperò si può assegnare il rapporto dei due cateti che congiungono la terra al sole ed alla luna. Ora tale determinazione è facilissima mediante i procedimenti trigonometrici di cui oggi disponiamo, ma esige una tattica speciale da parte di chi voglia risolverla colla pura geometria, come apparirà dalla seguente esposizione del ragionamento usato da Aristarco.

Sia (fig. 1ª) TLS il triangolo costituito dai tre astri nell'istante considerato, onde l'angolo SLT sarà retto e l'angolo LTS

---

(1) Si ricordi che il *segno* è la dodicesima parte dello Zodiaco.

(2) Pappo ed. Hultsch, p. 554 e seg.

(3) Secondo l'*Annuaire du Bureau des longitudes pour l'an 1900*, la grandezza apparente della luna è 31' 8" 18, cioè poco più della quarta parte di quanto credeva Aristarco.

di 87°. Nel piano TLS si descriva il quadrante di centro T e raggio TS e se ne tracci il raggio TLD; si descriva ancora su TS il quadrato $STEF$, di cui si conduca la diagonale TF; si segni ancora la bisettrice TG dell'angolo FTE. Essendo per la ipotesi e le costruzioni fatte

$$\text{ang } GTE = \frac{1}{4}\, 90°, \text{ang } DTE = 3°$$

sarà

$$\frac{\text{ang } GTE}{\text{ang } DTE} = \frac{15}{2}. \tag{1}$$

Detto poi H il punto in cui EF è tagliata dal prolungamento del raggio TD si avrà:

$$\frac{GE}{HE} > \frac{\text{ang } GTE}{\text{ang } DTE}, \tag{2}$$

onde, per la (1),

$$\frac{GE}{HE} > \frac{15}{2}. \tag{3}$$

Ma

$$\overline{TF}^2 = 2\,\overline{TE}^2, \quad 2 \,.\, 25 > 49,$$

onde

$$25 \,.\, \overline{TF}^2 > 49 \,.\, \overline{TE}^2,$$

ossia

$$\frac{TF}{TE} > \frac{7}{5}.$$

Applicando ora al triangolo EFT la notissima proprietà della bisettrice di un angolo di un triangolo (Euclide, Lib. VI, Prop. 3) si trasforma questa relazione nell'altra

$$\frac{GF}{GE} > \frac{7}{5},$$

da cui, componendo,

$$\frac{EF}{EG} > \frac{12}{5}. \tag{4}$$

Moltiplicando le (3), (4) si conclude

$$\frac{EF}{EH} > 18 \text{ ossia } \frac{TE}{EH} > 18,$$

onde *a fortiori*

$$\frac{TH}{EH} > 18 .$$

Se da ultimo si osserva la simiglianza dei triangoli LST, ETH si può trasformare questa relazione nell'altra

$$\frac{TS}{TL} > 18 . \tag{5}$$

Un'altra relazione congenere si ottiene conducendo la DK parallela a TE e descrivendo su DT come diametro una semicirconferenza. Questa passerà per K e l'arco TK sarà di 6°; condotta inoltre la corda $TM = \frac{1}{2} TD$, l'arco TM varrà 60° onde

$$\text{arco } TM = 10 \text{ arco } TK.$$

Ma

$$\frac{\text{arco } TM}{\text{arco } TK} > \frac{\text{corda } TM}{\text{corda } TK} \tag{6}$$

quindi

$$\frac{TM}{TK} < 10 \quad \text{e} \quad \frac{TD}{TK} < 20.$$

Utilizzando finalmente la simiglianza dei triangoli TDK e TSL si conclude la relazione annunziata, cioè

$$\frac{TS}{TL} < 20. \tag{7}$$

Le (5) e (7) compongono la limitazione

$$18 < \frac{TS}{TL} < 20$$

che è appunto quella racchiusa nel riferito teorema di Aristarco.

Il ragionamento esposto ora riposa sull'applicazione, oltrechè di notissime proporzioni contenute negli *Elementi* di Euclide, di un teorema che è espresso dalle relazioni (2) e (6) e che in linguaggio moderno si enuncia come segue: se due archi x, y sono tali che si abbia

$$0 < x < y < \frac{\pi}{2},$$

si avrà anche

$$\frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x} < \frac{y}{x} < \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x}.$$

È un teorema molto importante di cui più tardi (n. 41) apprenderemo la dimostrazione datane da Tolomeo (1); ma qui va rilevato come esso appaja già noto anteriormente ad Aristarco.

Dalla Prop. VIII il nostro autore ne deduce un'altra osservando (Prop. IX) che, siccome un'eclissi totale di sole non dura che pochi minuti, il vertice del cono d'ombra (lunare) deve lambire la terra, onde con grande approssimazione il rapporto dei diametri del sole e della luna può equipararsi al rapporto delle distanze dalla terra del sole e della luna; dunque quel rapporto è compreso fra 18 e 20 (Prop. XI) e quindi (Euclide, Lib. XII, Prop. 18) il rapporto dei volumi dei detti corpi è compreso tra $18^3 = 5832$ e $20^3 = 8000$.

21. A meglio caratterizzare l'indole dei ragionamenti adoperati da Aristarco, riferiremo ancora il metodo che egli ha seguito per determinare due limiti fra cui è compreso il rapporto tra il diametro lunare e la distanza fra la terra e la luna.

Sia (fig. 2.ª) A l'occhio dell'osservatore e B il centro della luna nell'istante in cui essa trovasi col sole in un cono di vertice A. Per la retta AB conduciamo un piano (il piano del disegno) il quale tagli la luna nel circolo CDE ed il cono anzidetto lungo le rette AC, AD; si tracci anche il diametro CBE. In forza della VI ipotesi (2) sarà angolo $BAC = 1^\circ$ e

$$\frac{BC}{AC} < \frac{1}{45}\ ^{(3)}, \quad \frac{CE}{AC} < \frac{2}{45}$$

---

(1) Una dimostrazione, congegnata da Commandino ed esposta nella sua traduzione latina di Aristarco (Pisa, 1572), si ritrova nell'articolo di D. Besso, *Sopra una ricerca goniometrica di Aristarco di Samo* (Periodico di Matematica, T. IV, 1885, p. 14-17).

(2) Va notato che soltanto dall'essere tale ipotesi tanto lontana dal vero deriva la inesattezza del risultato ottenuto da Aristarco.

(3) Ciò equivale ad ammettere

$$\operatorname{tg} 1^\circ < \frac{1}{45} = 0,0222...$$

il che è vero essendo (Schubert, *Fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmische und trigonometrische Rechnung*, Leipzig 1897)

$$\operatorname{tg} 1^\circ = 0,01746.$$

onde *a fortiori*

$$\frac{CE}{AB} < \frac{2}{45}. \tag{8}$$

Si descriva poi il circolo di centro A e raggio AC e si tracci in esso la corda DF eguale al raggio. Essendo arco $CD = 2°$ e arco $DF = 60°$ sarà

$$\frac{\text{arco } DC}{\text{arco } DF} = \frac{1}{30}.$$

Ma

$$\frac{\text{arco } DC}{\text{arco } DF} < \frac{\text{corda } DC}{\text{corda } DF}$$

dunque

$$\frac{DC}{DF} > \frac{1}{30} \quad \text{o} \quad \frac{2\,CH}{AC} > \frac{1}{30}.$$

Essendo poi simili i triangoli ACH e ACB se ne dedurrà

$$\frac{2\,CB}{AB} > \frac{1}{30},$$

ossia

$$\frac{CE}{AB} > \frac{1}{30}. \tag{9}$$

Riunendo le disuguaglianze (8), (9) si conclude che

$$\frac{1}{30} < \frac{CE}{AB} < \frac{2}{45},$$

cioè, come afferma Aristarco (Prop. XII): " il rapporto del diametro lunare alla distanza tra la terra e la luna è compreso tra $\frac{1}{30}$ e $\frac{2}{45}$ ". Con procedimento analogo egli trova che il rapporto dei diametri del sole e della terra è compreso tra $\frac{19}{3}$ e $\frac{43}{6}$ (Prop. XVI) e ne deduce (Prop. XVII) che il rapporto dei volumi di quei due corpi è compreso tra $\frac{6859}{27}$ e $\frac{79507}{216}$. Combinando questa proposizione

con altre precedenti conclude essere $\frac{108}{43}$ e $\frac{60}{19}$ (1) due numeri fra cui è compreso il rapporto dei diametri della terra e della luna e quindi $\frac{1259712}{79507}$ e $\frac{216000}{6859}$ come limiti fra cui è racchiuso il rapporto dei loro volumi (2).

Arrestiamoci un istante ancora all' opera di Aristarco per annunciare che ivi troveremo più tardi (n. 54) delle proposizioni appartenenti all' ottica geometrica, per notare la forma rigorosamente euclidea in cui è scritta, e per estrarne le seguenti proposizioni, con cui essa apresi:

" Due sfere uguali sono inscritte nello stesso cilindro e due diseguali in uno stesso cono; in un caso e nell' altro la retta che congiunge i centri delle due sfere è perpendicolare ai piani dei circoli di contatto „ (3).

22. Lo scritto di Aristarco ora esaminato non è l' unica opera del celebre astronomo di Samo; lo fa ritenere il fatto che ivi non è fatta menzione del sistema eliocentrico da lui sostenuto (v. n. 9), lo prova indiscutibilmente uno squarcio dell'*Arenario* di Archimede che qui riferiamo per dare una idea di quelle ricerche che valsero al grande Siracusano fama di eminente astronomo tra gli antichi (4):

Tu sai (5) che il mondo viene detto una sfera il cui centro coincide col centro della terra ed il cui raggio è eguale alla retta che unisce il centro della terra al centro del sole. Questo è scritto in generale e tu lo apprendesti dagli astronomi. Ma Aristarco di Samo pubblicò un certo libro intitolato ***Ipotesi*** (ὑποθεσίων) dal quale emerge essere il mondo assai più grande di quanto dicemmo. Infatti egli ammette che le stelle ed il sole stiano fermi e la terra giri attorno al sole come centro, e che la grandezza della sfera delle stelle fisse, avente per centro il sole, sia tale che la circonferenza descritta dalla terra sta alla distanza delle stelle fisse come il centro

---

(1) Come valore medio di questo rapporto si può quindi assumere 0,3531; lo paragoni il lettore a quello (0,272975) insegnato (v. il precitato *Annuaire*) dalla scienza odierna.

(2) Ipparco, più tardi, trovò che i volumi del' sole, della terra e della luna stanno fra di loro come i numeri 1880, 27 e 1. V. *Teone Smirneo*, ed. Dupuis, p. 319; cfr. anche *Pappo ed. Hultsch* p. 554.

(3) Tali proposizioni trovano applicazioni alla spiegazione delle eclissi: v. *Teone Smirneo*, ed. Dupuis, p. 315.

(4) Cfr. un brano di Ipparco riferito da Tolomeo (*Almagesto*, ed. Halma, T. I, p. 153).

(5) Il discorso è rivolto a Gelone, re di Siracusa.

della sfera sta alla superficie. Ma, essendo costume di riguardare la terra come il centro del mondo, è a credersi che Aristarco intendesse dire che il circolo descritto dalla terra ha colla sfera delle stelle fisse lo stesso rapporto che ha la terra alla sfera chiamata mondo (1). Infatti le dimostrazioni sono congegnate come se i fenomeni avvenissero così e la grandezza della sfera su cui si immagina moversi la terra fosse eguale a quella che chiamiamo mondo.

Ora noi diciamo che, se si avesse una sfera di arena grande come la sfera delle stelle fisse immaginata da Aristarco, si potrebbe dimostrare che tra i numeri indicati nel libro (2) dei *Principi* (ἀρχαῖ) ve ne sono di quelli che sorpassano il numero dei grani di sabbia contenuti in tale sfera (3). Bisogna per ciò ammettere: 1.° Che il contorno della terra sia 300 miriadi (3000000) di stadj (4), ma non maggiore; perchè, come sai, taluno volle dimostrare che esso è circa 30 miriadi di stadj (5). Ma io, spingendomi molto più avanti lo suppongo dieci volte maggiore, cioè circa 300 miriadi di stadj, ma non più. 2.° Poi, che il diametro della terra sia maggiore di quello della luna, anche qui conformemente al parere di molti astronomi anteriori. 3.° Inoltre, che il diametro del sole sia trenta volte quello della luna, ma non più. Giacchè fra gli astronomi ora citati, Eudosso dichiarò essere quel diametro nove volte il diametro della luna, Feidia (6) dodici, mentre da ultimo Aristarco (7) si è sforzato a dimostrare che il diametro del sole è maggiore di 18 volte e minore di 20 volte il diametro della luna. Quanto a me, spingendomi più oltre per dimostrare inconfutabilmente l'asserto, suppongo essere il diametro del sole eguale a 30 volte quello della luna, ma non di più. 4.° Finalmente che il diametro del sole sia maggiore del lato del poligono regolare di mille lati inscritto nel circolo massimo della

---

(1) Questa interpretazione delle idee di Aristarco è giudicata generalmente arbitraria; v. Schiaparelli, *I precursori di Copernico* p. 34; Heiberg, *Quaestiones Archimedeae* (Hanniae, 1879) p. 202 e *Archimede ed. Herberg* T. II, p. 247.

(2) Oggi perduto.

(3) A ragione pertanto scrive lo Chasles: « le but d'Archimède était de détrnire une opinion erronée, savoir que le nombre des grains de la terre était infini, ou du moins qu'on ne pouvait assigner un nombre plus grand (*Eclaircissement sur le traité « de numero arenae »*, Comptes rendus etc., T. XIV, 1842, p. 547-559). Invece nulla prova che ragionevolmente il Libri asserisse: « Archimède a écrit, comme on sait, un traité intitulé l'*Arénaire*, qui n'a d'autre but que de simplifier la numération des Grecs » (*Hist. des Sciences math. en Italie*, T. II, Paris, 1838, p. 295).

(4) Essendo lo stadio 157 metri, Archimede ammette che il meridiano terrestre sia 47100000 metri, mentre è 40000000. Aristotele (seguendo in ciò probabilmente Eudosso) lo ammetteva di 400000 stadj.

(5) Archimede sembra alludere qui ad una determinazione fatta da Dicearco alla fine del IV sec. od al principio del III sec. (v. Hultsch, *Poseidmios über die Grösse und Entfernung der Sonne*, Abh. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Hist.-phil. Klasse, Neue Folge, T. I, 1897, p. 340), determinazione il cui risultato venne tosto abbandonato per quello che Eratostene (L. II, n. 48) dedusse dalla misura di un arco di meridiano, e che fa il meridiano di 252000 stadj (*Teone Smirneo*, ed. Dupuis, p. 204 e seg.).

(6) Quello che venne identificato col padre di Archimede, v. L. II, n. 32.

(7) Cfr. più indietro, n. 18.

sfera del mondo. Ammetto ciò avendo Aristarco asserito (1) che il sole appare circa la 720ª parte dello zodiaco.

Per giustificare pienamente quest'ultima ipotesi Archimede descrive una ingegnosa esperienza che lo condusse a concludere che l'angolo sotto cui ci appare il sole è compreso tra la 164.ª e la 200.ª parte di un angolo retto. Applicando poi i teoremi insegnati nel suo opuscolo sulla *Misura del circolo* (Lib. II, n. 43) e quella proposizione trigonometrica che vedemmo usata da Aristarco (n. 20) egli conclude essere accettabile la detta ipotesi. Per dedurre da ciò che il diametro del mondo è minore di 10000 diametri terrestri e minore anche di 10000000000 stadî Archimede ragiona poi così.

Chiaminsi s, l, t, m i diametri del sole, della luna, della terra e del mondo; inoltre L_{1000} e P_{1000} il lato ed il perimetro del poligono di mille lati inscritto nel circolo massimo della sfera del mondo. In forza delle ipotesi fatte si ha

$$s \leqq 30 l, \quad l < t$$

onde

$$s < 30 t;$$

inoltre

$$s > L_{1000}$$

onde

$$P_{1000} < 1000 s < 30000 t.$$

Ma la geometria insegna essere

$$P_{1000} > 3 m,$$

onde

$$m < \frac{1}{3} P_{1000} < 10000 t,$$

e così la prima proposizione è dimostrata. E notando che, per le ipotesi fatte

$$t < 1000000 \text{ stadi},$$

si conclude

$$m < 10000000000 \text{ stadi},$$

conformemente alla seconda asserzione di Archimede.

---

(1) Probabilmente in un'opera oggi perduta.

23. Le investigazioni consegnate nella parte astronomica dell'*Arenario* furono, più tardi, il punto di partenza di altre compiute dal filosofo stoico Posidonio (1) e delle quali, verso la metà del I Sec. a. C. rese conto Cleomede nell'opera Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων. Non ci arresteremo a lungo su di esse perchè non contengono alcun importante contributo all'incremento delle nostre cognizioni geometriche (2); ma noteremo un ingegnoso procedimento per calcolare il diametro del sole. Esso poggia sull'osservazione — dovuta ad Eratostene — che a Siene (città posta sul tropico del Cancro), nel giorno in cui cade il solstizio estivo, si ha, nell'istante del mezzodì, uno spazio senz'ombra di 300 stadî, e sull'ipotesi che la trajettoria solare sia 10000 volte un cerchio massimo della terra.

Per utilizzarle chiamisi (3) (Fig. 3.ª) T il centro della terra, S la posizione di Siene e A il centro del sole a mezzodì del detto giorno. Si immagini tagliato tutto il sistema con un piano condotto per la retta AST (il piano del disegno) e, guidate da T le tangenti TB, TC alla traccia lasciata su questo piano dal globo solare, se ne determinino le intersezioni I, L colla superficie terrestre; in tutti i punti compresi fra I e L non vi è ombra. Ora la distanza IL fu trovata essere 300 stadi, e la distanza tra il sole e la terra è per ipotesi 10000 raggi terrestri; quindi

$$TA = 10000\ TS \quad , \quad IL = 300 \text{ stadi}$$

Ma, fra gli archi o le corde che presentansi nella figura, sussiste la relazione

$$\frac{BC}{IL} = \frac{TA}{TS},$$

onde

$$BC = 3000000 \text{ stadi}$$

---

(1) Nato in Siria, vissuto a Roma (ove fu maestro di Cicerone ed amico di Pompeo) e morto a Rodi circa nell'80 a. C.

(2) Maggiori particolari si troveranno — oltrechè nella memoria dianzi citata di F. Hultsch sopra Posidonio — nelle opere seguenti: Bailly, *Histoire de l'astronomie moderne* T. I (Paris, 1779) p. 119; Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne* T. I (Paris, 1817) p. 223; Wolf, *Geschichte der Astronomie* (München, 1877) p. 175.

(3) Cfr. Schiaparelli, *Opinioni degli antichi sulle distanze e sulle grandezze dei corpi celesti* (Mem. del R. Ist. Lombardo, T. X) nota c.

Ora *BC* può, senza grave errore considerarsi eguale al diametro del sole, onde questo vale 3 milioni di stadj, come trovò Posidonio.

I risultati di queste, come di tutte le altre calcolazioni sin qui riferite, sono così lontani dal vero, che indarno se ne cercherebbe in un trattato moderno di astronomia. Tuttavia di esse doveva venir qui fatto cenno perchè mostrano come i Greci, dopo avere lasciato libero corso alla loro fantasia nel congegnare spiegazioni della costituzione e del meccanismo dell'universo, abbiamo finito per mettersi sopra una strada razionale, sopra l'unica che doveva condurre ad una vera scienza astronomica. Nel Cap. seg. troveremo altre attestazioni, benchè di natura un po' differente, del medesimo fatto e nel Cap. III potremo constatare i risultati di tali sforzi; ma intanto, vegga il lettore, quanto cammino era già stato percorso da Talete a Posidonio!

II.

La Sferica.

Il più antico trattato sulla Sferica.

24. Pappo, nell'esordio del VI Libro della *Collezione,* accenna (1) con imperfetta precisione, ad un gruppo di scritti la cui conoscenza è indispensabile a coloro che, essendo già istruiti negli *Elementi* di Euclide, vogliono dedicarsi allo studio dell' astronomia; questi scritti hanno le loro radici nell'opera maggiore del celebre alessandrino, cosicchè possono riguardarsi come continuazioni o meglio complementi di essa. E poichè essi sono necessari alla intelligenza della *composizione matematica* di Tolomeo (v. più avanti n. 37) così il loro insieme è chiamato da un anonimo scoliasta di Pappo *Piccola collezione astronomica* (2). Quali lavori questa comprendesse non è noto con assoluta esattezza, fors'anche gl'ingredienti di essa variarono col tempo (3);

---

(1) Pappo ed. Hultsch p. 474.

(2) Id. p. 1142.

(3) Ed infatti gli Arabi — che tradussero le opere della *Piccola collezione astronomica*, dando ad esse il nome di *Opere intermedie* — vi comprendevano anche alcuni scritti di Archimede e Menelao. Cfr. Steinschneider, *Die mittleren Bücher der Araber und ihre Bearbeiter* (Zeitschrift f. Math. und Phys., T. X, 1865, p. 456-498).

sembra però che di essa facessero parte quattro opere di Euclide (*Dati, Ottica, Catottrica, Fenomeni*), tre di Teodosio (*Sferica, Delle abitazioni, Delle notti e dei giorni*), due di Autolico Pitaneo (*Della sfera mobile* e *Del levarsi e tramontare delle stelle*), una di Ipsicle (*Delle ascensioni*) e una di Aristarco Samio (*Grandezze e distanze del sole e della luna*).

Due di questi scritti ci sono già noti, cioè i *Dati* di Euclide (L. II. n. 25) ed il libro di Aristarco (v. nn. 19-21); dell' *Ottica* e della *Catottrica* è opportuno rimandare lo studio al Cap. IV (v. nn. 51-56). Tutte le altre concernono la teoria elementare delle linee tracciate sopra una superficie sferica, disciplina questa che Pitagora (cf. L. I, n. 29) elevò a scienza individuale assegnandole il quarto posto (dopo l'Aritmetica, la Musica e la Geometria) nella collezione delle scienze matematiche. La *Sferica* — tale è il nome della nuova disciplina — comprende due ordini di teoremi: negli uni si suppone fissa la sfera che si studia, nei secondi la si considera animata da una rotazione uniforme attorno ad un suo diametro. Come più perfetto modello della esposizione dei primi deve considerarsi la *Sferica* di Teodosio, e come prototipo di una trattazione dei secondi i *Fenomeni* di Euclide o meglio il primo dei succitati lavori di Autolico. Si osservi ora che lo studio della sfera mobile suppone già compiuta l'investigazione delle proprietà della sfera fissa, mentre la *Sferica* di Teodosio è posteriore allo scritto di Autolico; d'altronde sia questi, sia Euclide nei *Fenomeni* (1), parlano come se avessero a propria disposizione un trattato delle proprietà della sfera fissa; tutto ciò conduce alla conclusione che sin dal IV Sec. a. C. esisteva una sferica che, rimaneggiata ed ampliata, si ritrova nell'opera di Teodosio. Anzi la rigorosa concatenazione logica delle proposizioni che esiste in tutte le opere matematiche dei Greci permette di ricostruire nelle sue linee generali tale opera perduta; basta perciò accuratamente notare tutti i teoremi su cui tacitamente si fondano Euclide ed Autolico; si arriva così (2), non solo a concludere che Teodosio copiò fedelmente l'an-

---

(1) Heiberg. *Litt.-gesch. Studien über Euklid*, p. 43-47.

(2) Hultsch, Berichte der K. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig, Sitzung von 11 dec. 1886.

tico modello, ma ad indicare un buon numero di proposizioni degli *Elementi* anteriori ad Euclide (1).

Per determinare chi può essere stato l'autore di questa ipotetica Sferica altro mezzo non si presenta che esaminare l'elenco delle più spiccate personalità matematiche greche anteriori ad Euclide. Fra tutte emerge Eudosso da Cnido. " Geometra, astronomo e geografo, Eudosso che credeva, come Pitagora, alla sfericità della terra, aveva dovuto naturalmente occuparsi dei circoli della sfera terrestre al pari di quelli della sfera celeste " (2); inoltre il complicato sistema delle sfere omocentriche (v. nn. 12-15) esige una perfetta conoscenza della geometria della sfera; onde non senza ragione F. Hultsch emise l'ipotesi (3) che Eudosso fosse l'autore del primo trattato di Sferica. Tale ipotesi venne in generale accolta con favore: taluno la accettò per vera (4), altri la ammise con qualche riserva (5), ed anche chi la respinse, non la combattè (6). Noi pure troviamo in essa un indiscutibile grado di verosimiglianza; non vogliamo però tacere che giudichiamo, in tesi generale, assai pericoloso il sistema di attribuire un'opera di ignoto autore appartenente ad una certa epoca all'unico scienziato che si giudica fosse capace di concepirla (7);

---

(1) Secondo Hultsch sono le seguenti:

Lib. I, def. 9, 14-23; post. 1-5; assiomi 1-4, 7-9; prop. 1-5, 7-20, 22-24, 26-29, 31-34, 41, 46, 47.

Lib. III, def. 1, 2, 6-9, 11; prop. 1 (e cor.), 3, 5, 7, 10, 16, 20-22, 24, 26, 27, 31.

Lib. IV, prop. 6.

Lib. XI, def. 3, 4, 8, prop. 1-11, 13, 14, 16, 18, 19, 38.

(2) Th. H. Martin, Mém. de l'Acad. des Inscriptions et Belles-lettres, T. XXX, 1.re Partie, 1881, p. 169.

(3) *Die Sphärik des Theodosius und einige unedierte mathematische Texte* (Berichte der Sächs. Ges. des Wiss., 23 aprile 1885). V. anche la prefazione alla edizione di Autolico dovuta all'Hultsch.

(4) Oltre all'Heiberg, il Gow (*A short history of greek mathematics*, Cambridge 1884, p. 254).

(5) P. Tannery una volta si limita ad accennare all'ipotesi di Hultsch (*Géom. grecque*, p. 34), un'altra (*Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, p. 37) attribuisce quella Sferica « à l'Ecole d'Eudoxe, si non à lui même ».

(6) Il Cantor (*Vorlesungen*, 2.a ed., T. I, p. 279) semplicemente osserva che la ipotesi è indimostrata.

(7) Applicando tale sistema, se un giorno il piccolo volume in cui sono raccolte le opere di Galois perdesse il nome del suo autore, esso rischierebbe di venire attribuito a Cauchy, a Sturm, od a Liouville, che sono i più eminenti e noti analisti contemporanei e conterranei a Galois.

come non vogliamo tacere che troviamo assai più importante l'accertamento dell'esistenza dell'antica Sferica che la determinazione del nome dell'autore.

25. Dell'antica Sferica, la cui esistenza riteniamo non potere essere revocata in dubbio, sembrano esistere delle traccie nel Papiro del Louvre recante il n.° 1, decifrato dal Letronne, e pubblicato, dopo la morte di questo, dal Brunet de Presle (1), col titolo di *Arte d' Eudosso;* pare però preferibile quello proposto dal Letronne, che è *Didascalia celeste di Leptinio.* Venne scritto tra il 193 ed il 165 a. C. (cioè una generazione innanzi Ipparco) ed ha tutto l'aspetto di un quaderno scolastico (2), corrispondente ad un insegnamento orale fatto coll'ajuto di un manuale in versi. Comincia coll'annuncio di una esposizione della " ammirabile composizione del cielo "; ed insegna, infatti, anzitutto come si muovano il sole, la luna e le stelle erranti. A queste nozioni altre ne seguono concernenti i circoli della sfera celeste, le quali possiedono per noi uno speciale interesse, dimostrando che assai presto si avvertì la necessità di considerare in essa certi elementi (come ad esempio i circoli massimi, i circoli paralleli, i poli, ecc.) che si trovano tutto ora nei trattati di astronomia.

Per dare un'idea della forma in cui tali cognizioni vengono insegnate trascriviamo a titolo di esempio i brani seguenti:

Esistono nel mondo due poli attorno a cui esso gira. La terra, che ha la forma di una sfera, è situata in mezzo al mondo pure sferico (3), ed i poli attorno a cui gira il mondo sono immobili.

Prova. Infatti, se il polo salisse o discendesse, le Orse tramonterebbero e si leverebbero, mentre invece non si levano. Se il polo si spostasse verso Levante o verso Ponente, le stelle fisse non si leverebbero più negli stessi punti della terra, mentre lo fanno sempre. Dunque il mondo gira attorno a due poli immobili, come dovevasi dimostrare.

Ogni stella fissa si muove secondo un circolo; perchè ciascuna gira attorno al polo immobile ad una distanza che le compete e resta sempre la medesima, pertanto ciascuna deve moversi lungo un cerchio. Le stelle erranti, la luna ed il sole si muovono lungo spirali (4).

---

(1) *Notices et extraits des manuscrits*, T. XVIII, 2.ª Parte. 1865, p. 25 e seg.

(2) Cfr. F. Blass, *Eudoxi Ars astronomica qualis in charta Aegyptiaca superest denuo edita* (Kiliae, 1887) e P. Tannery, *Recherches sur l' histoire de l'astronomie ancienne* (p. 23-24 e 283-295).

(3) Questa proposizione si ritrova nei *Fenomeni* di Euclide sotto la forma: « la terra sta in mezzo al mondo e ne rappresenta il centro » (Prop. I).

(4) Cfr. n. 10 del presente Libro.

Infatti questi astri girano attorno al polo immobile senza conservare da esso la medesima distanza; ma quando sono nel Cancro la distanza è minima, nella Bilancia è maggiore ed è massima nel Capricorno; e ciò fa sì che le stelle erranti si muovano lungo spirali.

Le stelle fisse descrivono dei circoli paralleli. Infatti, rimanendo esse fra di loro sempre a distanze eguali, lo stesso accadrà pei loro cerchi; ed è appunto questo che caratterizza i circoli paralleli (1).

Non riferiremo le altre nozioni sulla inclinazione dello Zodiaco e sul modo in cui gli anni sono distribuiti nell'ottaeride (cf. n. 17), e nemmeno la spiegazione geometrica del fatto che un'eclisse di sole non è mai dappertutto totale, mentre può esserlo una di luna. Ma rileveremo due cose; cioè la presenza di due proposizioni che — come vedremo tra poco — Autolico (2) condensò in una unica, e lo stile in cui è scritta la *Didascalia,* il quale, con la sua somiglianza con quello degli *Elementi,* conferma l'ipotesi che la forma euclidea sia lo stadio più perfetto di un metodo di esposizione di origine assai più remota, (v. L. II, n. 24).

Autolico da Pitana.

26. Il più antico degli autori che, a quanto dice Pappo, collaborarono alla piccola collezione astronomica è Autolico da Pitana. Il quale, secondo Diogene Laerzio, sarebbe nato nell'Asia minore (sulla costa dell'Eolide) ed avrebbe avuto per discepolo il filosofo Arcesilao da Pitana, che entrò poi nella scuola che Teofrasto aprì ad Atene il 322 a. C. nel momento del ritiro di Aristotele, e ne uscì ancora giovane. Arcesilao era pertanto ancora nel fior degli anni nel 298 a. C., onde fu probabilmente verso il 322 a. C. che lasciò, per Teofrasto, Autolico. Questi adunque, insegnando (già od ancora?) nel 322, fu un po' anteriore ad Euclide (3) — il quale, come sappiamo, fiorì sotto Tolomeo Sotero (morto nel 283 a. C.) — e questa con-

---

(1) Questo stesso fatto è ripetuto e completato più avanti: « Le stelle fisse nelle loro rivoluzioni impiegano lo stesso tempo ed i loro cerchi sono paralleli. Ne diremo la ragione, è che il mondo gira attorno a due poli fissi ».

(2) *Della sfera mobile*, Prop. 9.

(3) Th. H. Martin, *Révue critique d'histoire et de littérature*, T. III, 1877, p. 409; Hultsch, Berichte der K. Sächs. Ges. der Wiss., 11 dicembre 1886. Autolico è in conseguenza di poco posteriore ad Aristotero, matematico noto soltanto per essere detto maestro di Arato: cfr. Wachsmuth, *Des Mathematiker Aristoterus* (Rhein. Museum für Philologie, Neue Folge, T. XX, 1865, p. 455-496).

clusione sembra confermata dall'esame delle opere superstiti (1) di Autolico a cui ora ci volgiamo (2).

Una di essa concerne la sfera animata da un movimento uniforme di rotazione e consta dei teoremi seguenti:

I. Quando una sfera ruota con velocità uniforme attorno al proprio asse, tutti i punti della sua superficie, non posti sull'asse, descrivono dei circoli paralleli, i cui poli coincidono con i poli della sfera ed i cui piani sono perpendicolari all'asse. II. Tutti quei punti descrivono sui propri paralleli in tempi eguali archi simili. III. Viceversa, archi simili sono percorsi in tempi eguali. IV. Se un cerchio massimo fisso perpendicolare all'asse della sfera divide questa in due parti una visibile e l'altra invisibile, nessun punto della sfera passa da una delle regioni nell'altra. V. Quando invece quel circolo massimo fisso contiene i poli, tutti i punti della sfera mobile passano da una regione nell'altra e restano tanto tempo nell'una quando nell'altra, cioè tanto sopra quanto sotto l'orizzonte. VI. Se l'orizzonte è obliquo all'asse, esso è toccato da due paralleli eguali uno dei quali è sempre visibile (il circolo artico) mentre l'altro (l'antartico) è invisibile (3). VII. Nella stessa ipotesi, i circoli perpendicolari all'asse e seganti l'orizzonte lo incontrano sempre negli stessi punti e sono similmente inclinati sull'orizzonte. VIII. I circoli massimi tangenti all'artico ed all'antartico coincideranno coll'orizzonte due volte durante ciascuna rivoluzione della sfera. IX. Se l'orizzonte è obliquo all'asse, di tutti i punti che sorgono nello stesso istante i più vicini al polo visibile tramontano più tardi e fra quelli che tramontano contemporaneamente sorgono prima i più prossimi al polo visibile. X. Nella stessa ipotesi, ogni circolo massimo passante pei poli della sfera risulta durante ogni rotazione due volte perpendicolare all'orizzonte. XI. Se un circolo massimo tocca due paralleli corrispondenti qualunque, avrà tutti i suoi punti di levata e di tramonto fra quei due circoli paralleli. XII. Se un cerchio fisso taglia in due parti eguali un cerchio mobile in tutte le sue posizioni, e se nessuno di quei due cerchi è perpendicolare all'asse o contiene i poli della sfera, allora quei due cerchi sono entrambi massimi.

27. Le proposizioni ora riferite sono così facili e pel geometra di così scarso interesse che non si sarebbe certamente pensato a raccoglierle in uno speciale trattato ove non si fosse visto che col loro ajuto si poteva rendersi ragione di alcuni fenomeni celesti. Non importa perciò che noi ci arrestiamo su di esse: ma ciò che va notato è lo stile in cui scrisse Autolico. La forma della sua espo-

(1) Una *Sopra i pianeti* contro Aristotero non esiste più.

(2) La migliore edizione di esse è quella che ha il titolo seguente: *Autolyci De sphaera quae movetur liber, De ortibus et occasibus libri duo, una cum scholiis antiquis edidit* F. Hultsch (Lipsiae, 1886).

(3) I nomi di *artico* ed *antartico* furono aggiunti da noi per chiarezza.

sizione è rigorosamente euclidea (v. L. II, n. 24) (1); ogni teorema è enunciato prima in termini generali e poi sulla figura, ed è anche ripetuto a mo' di conclusione al termine della dimostrazione: se altri ingredienti costanti (come sarebbero: enunciato delle condizioni di possibilità, costruzione, ecc.) dei teoremi degli *Elementi* non si rintracciano nelle dimostrazioni di Autolico, gli è che queste, vertendo sopra questioni più semplici, non potevano contenerli. Ciò non ostante resta anche da ciò confermato che lo stile di Euclide non è originale. Inoltre le argomentazioni usate da Autolico per dimostrare i teoremi II-IV e VI-VIII abilitano a far risalire il metodo apagogico ad un'epoca anteriore al periodo aureo della geometria greca (1).

Le or fatte osservazioni sullo stile usato da Autolico nella prima delle sue opere superstiti possono ripetersi riguardo a quello adoperato nell'altra. La quale verte *Sulle levate e sui tramonti* e può intendersi come una continuazione della prima, costituendo con quella una teoria del levarsi e del tramontare (apparenti e reali) delle stelle. Le relazioni ivi dimostrate sono geometricamente tanto semplici che crediamo superfluo darne qui una esposizione, nemmeno in compendio (2): tanto più che esse, anche per gli astronomi, possiedono un interesse scarsissimo, giacchè il loro insieme forma una teoria che si considera soltanto come una prima approssimazione alla verità (3).

Euclide ed Ipsicle.

28. Pel tema che trattano e per lo stile in cui sono scritti i lavori di Autolico si collegano all'opera di Euclide intitolata Φαινόμενα,

---

(1) Che la esposizione fatta da Autolico si avvicini alla perfezione è dimostrato dal fatto che Pappo, nel trattare lo stesso argomento nel VI Libro della sua *Collezione*, non mise del suo che qualche osservazione per spiegare la dipendenza fra le varie parti dell'opera di Autolico, ritenendo necessario soltanto di aggiungere (Pappo ed. Hultsch, p. 528) un breve ragionamento inteso a dimostrare che « la perpendicolare calata da un punto di sfera sopra un diametro è tutta interna alla sfera ».

(2) Per più minuti ragguagli si ricorra a Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, T. I (Paris, 1817) p. 235-243.

(3) V. la memoria di P. Tannery, *Autolycos de Pitane* (Mém. de la Soc. des Sciences de Bordeaux, 3e Série, T. I, 1884).

opera che, sospettata essere una di quelle ingiustamente attribuite al grande alessandrino da uno degli editori di Euclide (il Gregory), venne senz'altro esclusa dalla collezione delle opere di Euclide che un altro (il Peyrard) compose, mentre il più recente di essi (l'Heiberg) assume — a parer nostro con piena ragione — un'attitudine diametralmente opposta.

Questo nuovo lavoro di Euclide che ora incontriamo è — per usare le espressioni di un dotto italiano che lo ha pubblicato — un trattato elementare di astronomia (1), nel comporre il quale il professore del Museo attinse a larga mano, secondo il suo costume, alle opere di Autolico e degli anteriori studiosi di astronomia, senza però indicare le fonti che sfruttò (2). La mediocre originalità di quest'opera si rispecchia nel titolo, il quale è il medesimo che porta la più antica descrizione delle costellazioni a noi conosciuta — alludiamo ai *Fenomeni* di Arato da Soli (III Sec. a. C.) (3), versificazione di uno scritto anteriore di Eudosso (4) —. Del resto la identità del titolo si giustifica osservando che, in ultima analisi, il lavoro di Euclide dà la teoria matematica dei fenomeni descritti da Arato; è lo stesso che si propose di fare Autolico ne'suoi libri *Su le levate ed i tramonti*, ma Euclide raggiunge il suo scopo in modo più completo.

Per caratterizzare le verità da lui dimostrate riferiamo qui alcune delle — 18 secondo alcuni codici, 19 secondo altri — proposizioni che compongono i *Fenomeni*:

III. Le stelle che si alzano e tramontano, appaiono ogni giorno nel medesimo punto dell'orizzonte e tramontano pure nello stesso punto, il quale non è però quello in cui sorgono. VI. Gli astri dello zodiaco diametralmente opposti hanno albe e tramonti conjugati; lo stesso dicasi per gli astri diametralmente opposti sull'equatore. XI. Di due archi dello zodiaco eguali e contrari uno impiega ad alzarsi lo stesso tempo che l'altro impiega a tramontare. XVI. Archi eguali dello zodiaco non percorrono in tempi eguali l'emisfero invisibile.

---

(1) « Sunt phaenomena astronomiae scientiae principia » (*Euclidis Phaenomena post Zamberti et Maurolyci editionem, nunc tandem de Vaticana bibliotheca deprompta etc.* A Josepho Auria Neapolitano, Romae MDCIX).

(2) V. la succitata edizione, ove l'Auria ha accuratamente notati i passi in cui sono invocate proposizioni che si leggono in Adtolico ed in Teodosio; inoltre Heiberg, *Studien üb. Euklid* p. 41-46.

(3) Il Susemihl (op. cit. T. I, 1891, p. 284 e seg.) lo dice nato circa nel 315 a. C.

(4) V. Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, T. I (Paris, 1817) p. 61-74.

Può darsi che, come dice un eminente storico, questi teoremi appartengano alla metafisica dell' astronomia sferica, ma ci sembra esagerazione l'affermare che alla pratica non derivi da essi nessuna utilità (1); giacchè, se anche essi non somministrano il mezzo per eseguire alcuna determinazione di misura, porgono però gli elementi di una descrizione razionale dei fenomeni astronomici. Ed è probabilmente per questo che Pappo giudicò l' opera di Euclide degna di assiduo studio e di un particolareggiato commento (2).

Non ci arrestiamo a parlare della forma in cui sono scritti i *Fenomeni,* chè essa non porge che nuove conferme a quanto dicemmo sullo stile euclideo; ma, prima di lasciare quest' opera, notiamo il passo seguente: " se un cono od un cilindro è segato con un piano parallelo alla base, la sezione risultante è una sezione di cono acutangolo somigliante a un θυρεόν "; lo notiamo per aggiungere che è fondandosi sopra di esso e precisando un' idea del Bretschneider (3), che l' Heiberg suppose essere θυρεός il nome originario dato da Menecmo all' ellisse (4).

29. Della piccola collezione astronomica fa parte anche (v. n. 24) uno scritterello a noi già noto di uno fra i pretesi continuatori degli *Elementi* di Euclide (L. II, n. 30). Essa ha una certa importanza per essere il primo in cui trovasi applicata la divisione del cerchio in gradi e sessantesimi di grado (5), e presenta qualche interesse perchè è una di quelle che abilitano a formarsi un' idea del come venivano trattate, prima dell' invenzione della trigonometria, le questioni in cui essa oggi trova la sua naturale applicazione. Del resto — affrettiamoci a dichiararlo — il problema ivi risolto (e non senza errori) possiede così esiguo valore per l' astronomo, che si è supposto, e non a torto, esso sia stato sciolto soltanto in vista di applicazioni all' astrologia (6).

L' 'Αναφορικός (*Delle ascensioni*) — tale è il titolo dell' opu-

(1) Delambre, vol. cit. p. 56.

(2) V. il Libro VI della *Collezione* (ed. Hultsch, p. 594-632).

(3) *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides* (Leipzig, 1870) p. 176 nota.

(4) *Studien* succitati, p. 88.

(5) P. Tannery, *Le géométrie grecque*, p. 156.

(6) V. Manitius op. cit. nella nota seguente, e P. Tannery, *Recherches sur l' histoire de l' astronomie ancienne*, p. 40.

scolo di Ipsicle (1) — intende rispondere alla domanda: " in quale istante, sotto la latitudine di Alessandria, si leva ogni segno od ogni grado dell' eclittica? „ La risposta viene data mediante un' ipotesi che oggi deve giudicarsi assolutamente falsa, ed è che le differenze di ascensioni per archi in progressione aritmetica siano pure in progressione aritmetica. Ma per arrivare a formulare quella risposta Ipsicle invoca e dimostra tre teoremi esattissimi concernenti una progressione aritmetica decrescente

$$u_1 \ , \ u_2 \ , \ u_3 \ldots$$

di ragione d e che possono esprimersi mediante le relazioni seguenti:

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_n) - (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n}) = n^2 . d$$
$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2n+1} = (2n + 1) u_n$$
$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2n} = n(u_k + u_{2n+1-k}) \text{ (per } k = 1, 2, \dots, n).$$

A queste proposizioni (2) ed all' esempio che esso offre di una interpolazione eseguita secondo le ordinate dalla parabola $y = ax^2 + bx + c$ (3) il libro di Ipsicle deve se viene citato con qualche lode nella storia della matematica greca.

Teodosio da Tripoli.

30. Soggetti somiglianti a quelli trattati da Autolico ed Euclide sono esposti in due opere *Sulle abitazioni* (περὶ οἰκήσεων) e *Su i giorni e le notti* (περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν) scritte circa mezzo secolo

(1) L' *editio princeps* fu fatta da G. Mentelio a Parigi nel 1657. Noi ci serviremo della (unica) posteriore contenuta nella dotta monografia di K. Manitius, *Des Hypsikles Schrift Anaphorikos nach Ueberlieferung und Inhalt kritisch behandelt* (Dresden, 1888); alla quale rimandiamo chi desideri notizie intorno ai manoscritti contenenti l' *Anaforico* ed alle traduzioni (arabe e latine) che ne furono fatte, nonchè alle questioni intorno allo scopo ed al valore di esso ed al modo in cui venne giudicato. Il problema di Ipsicle venne ripreso e sciolto poi in modo soddisfacente da Ipparco in un' opera che noi non possediamo più (*Pappo ed. Hultsch*, p. 600).

(2) P. Tannery, *Le géom. grecque*, p. 156-7.

(3) Esse si collegano a delle ricerche di Ipsicle sui numeri poligonali di cui Diofanto (v. L. V, n. 57) serbò memoria.

a. C. (1) da Teodosio da Tripoli (in Bitinia). Nella prima — composta di 12 proposizioni — è spiegata la diversità dei fenomeni che presenta la rivoluzione diurna della terra secondochè l'osservatore si suppone nel polo, all'equatore od in una delle zone (torrida, temperata, artica) (2). Nell'altra — di 13 + 19 proposizioni distribuite in due libri —, Teodosio tien conto dell'arco descritto ogni giorno dal sole sopra l'eclittica per determinare quali condizioni devono essere verificate affinchè il solstizio avvenga nel meridiano di un dato luogo o affinchè agli equinozi il giorno e la notte siano effettivamente fra loro eguali; dimostra anche che le variazioni del giorno e della notte si devono riprodurre rigorosamente dopo un certo tempo, se la lunghezza dell'anno solare è commensurabile con quella del giorno, mentre non si riprodurranno così esattamente nel caso contrario (3).

Ma Teodosio c' interessa assai più che grazie a queste opere per un trattato di Sferica (σφαιρικῶν βίβλια γ) il quale, essendo il più antico superstite sopra tale argomento, deve essere consultato ed invocato ogniqualvolta si tratti di determinare la storia di qualche teorema di geometria sferica (4).

31. Prima di cominciare la descrizione degli argomenti svolti da Teodosio, ricordiamo che negli *Elementi* di Euclide la sfera è trattata in modo assai superficiale ed incompleto, sembra anzi che il sommo Alessandrino se ne sia occupato unicamente per essere dessa il

---

(1) Fabricii *Bibl. gr.* (ed. Harless) T. IV, p. 21. Cfr. P. Tannery, *Recherches sur l' hist. de l' astr. ancienne*, p. 38.

(2) Delambre, op. cit. T. I, p. 235-237.

(3) Id. p. 257-243. V. anche il commento scritto da Pappo nel VI Libro della *Collezione* (ed. Hultsch, p. 530-534).

(4) Per tale ragione la *Sferica* di Teodosio venne pubblicata molte volte nell'originale ed in traduzione. La traduzione dall'arabo in latino di Platone Tiburtino trovasi nel volume del Nucarello *Sphaera mundi noviter recognita* (Venezia 1518). Notevole è anche *Theodosii Tripolitae Sphaericorum Liber III a Christophoro Clavio perspicuis demonstrationibus ac scholiis illustrati* (Romae, 1586). Va pure ricordata la traduzione tedesca (di cui ci serviamo) *Theodosius von Tripolis Drei Bücher Kügeslchnitte, aus dem griechischen mit Erläuterungen und Zusätzen herausgegeben* von E. Nizze (Stralsund, 1826), nella prefazione della quale si trovano informazioni complete sulle edizioni e traduzioni anteriori. Una importante collezione di *Scholien zur Sphaerik des Theodosius* fu pubblicata recentemente da F. Hultsch (Abh. der phil.-hist. Klasse der k. sächs. Ges. der Wiss., T. X, 1887).

recipiente che accoglie i cinque corpi regolari, alla costruzione dei quali egli consacrò tutto l'ultimo libro del trattato; in conseguenza si limitò a dimostrare (Lib. XII, prop. 18) il teorema che dà il rapporto tra i volumi di due sfere qualisivogliano. Questo sorprendente silenzio di Euclide sopra tutte le altre proprietà della sfera si spiega perfettamente ammettendo che gli antichi considerassero la teoria di questo solido come una parte, non della geometria pura, ma dell'astronomia teoretica. Di tale ipotesi sul modo di considerare la geometria sferica si ottiene una conferma paragonando le definizioni che dànno della sfera Euclide e Teodosio: per il primo essa è una figura geometrica di cui importa conoscere la generazione e di cui quindi egli dà una definizione genetica mediante rotazione di un semicerchio attorno ad un diametro, per il secondo invece essa è un ente già dato, caratterizzato dalla proprietà di avere tutti i suoi punti equidistanti da un punto fisso; in una parola è la figura che si concepisce contemplando la volta celeste in una notte serena. E che Teodosio pensasse spessissimo alla sfera celeste nello scriver l'opera che attualmente ci occupa, è dimostrato, non soltanto da quella definizione, ma da innumerevoli altri passi della *Sferica* (1).

Il I dei tre libri di Teodosio apresi coll'affermazione che " ogni sezione piana di una sfera è un circolo ". Segue il " porisma " — che è una estensione allo spazio di quello che insegna Euclide nel III Libro degli *Elementi* — col mezzo del quale si costruisce il centro di una data sfera. Pure generalizzazioni di teoremi di Euclide (Libro III, prop. 18, 19, 14 e 15) sono quelli esposti da Teodosio sui piani tangenti ad una sfera e sulla relazione che intercede tra le grandezze delle sezioni prodotte in una sfera da piani e le distanze di questi dal centro di quella. Similmente, la proposizione che dice essere i circoli massimi di una sfera caratterizzati dalla proprietà di bisecarsi scambievolmente è analoga ad una che compete ai diametri di un cerchio; essa conduce naturalmente a proporsi un problema che è risoluto dal seguente teorema: " la condizione necessaria e sufficiente affinchè un circolo massimo bisechi un circolo minore è che passi pei poli di questo ". Teodosio dimostra anche che

(1) Il che però non toglie a questa il carattere di complemento alla parte stereometrica degli *Elementi*, che essa indiscutibilmente possiede.

" in un circolo massimo la distanza (rettilinea) di un polo dalla periferia è eguale al lato del quadrato inscritto „, nè ignora la verità della proposizione reciproca. Il I Libro della *Sferica* di Teodosio finisce con un gruppo di problemi fondamentali: determinazione del diametro di un circolo appartenente ad una sfera o della sfera stessa, costruzione del circolo massimo passante per due punti non diametralmente opposti di una sfera, determinazione dei poli di un dato circolo.

32. Nel II Libro Teodosio si occupa delle relazioni a cui dà luogo la considerazione di una serie di circoli paralleli segati dai circoli massimi passanti pei loro poli comuni, oppure quella di circoli fra loro tangenti: basti rilevare la proposizione — già conosciuta da Autolico — " se un circolo massimo tocca un circolo minore, ne toccherà pure un secondo eguale e parallelo al primo „. Va anche notata la ricerca del circolo massimo tangente ad un circolo minore in un suo punto e dei circoli massimi condotti da un punto di una sfera a toccarne un dato circolo minore; tale ricerca, evidentemente ispirata dall' analoga nel piano già compiuta da Euclide (Lib. III, Prop. 17), mostra che sin dai tempi di Teodosio si cominciava ad accorgersi che nella geometria della sfera i circoli massimi compiono un ufficio analogo a quello che disimpegnano le rette nella geometria del piano.

I medesimi argomenti vengono ulteriormente svolti nelle (quattordici) proposizioni del III Libro, che probabilmente è quello in cui Teodosio mise più del proprio. Ivi la considerazione incessante del circolo massimo parallelo ad un sistema di circoli paralleli di una sfera, induce la persuasione che l' autore pensasse sempre all' equatore ed ai paralleli della sfera celeste; a ritener ciò si è anche condotti osservando da un lato che, se non fosse in vista delle applicazioni astronomiche, non si capirebbe perchè Teodosio siasi tanto dilungato sopra il paragone di certi circoli, il quale non offre nessun interesse pel geometra, ed osservando, d' altronde, che alcune sue proposizioni vennero realmente sfruttate dai cultori dell' Astronomia (1). Non si stupisca il lettore se noi non riferiamo nemmeno gli enunciati di proposizioni in cui la complicazione dà l' apparenza di

(1) Teone Alessandrino ed. Halma, T. I, p. 103.

valore, nascondendone l'insignificanza. Va però osservato: 1.° che nella Prop. 9ª Teodosio approfitta della possibilità di determinare una quantità la quale sia compresa fra due date quantità omogenee e sia commensurabile con una terza; 2.° che nella 10ª si appoggia sul seguente lemma: " se n quantità u_1 u_2 .... u_n sono tali che

$$u_1 > u_2 > \dots > u_n$$

si avrà

$$u_n < \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} < u_1 \,, \quad \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_m}{m} > \frac{u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n}{n-m} \text{ »};$$

3.° che nella 11ª applica quella importante limitazione trigonometrica che già incontrammo in Aristarco (n. 20) ed in Archimede (n. 22).

Contrariamente al nostro costume di rilevare quello che si trova negli scritti che analizziamo, non quello che vi si cercherebbe indarno, osserveremo, prima di abbandonare Teodosio, che nella sua *Sferica* non vi è il menomo accenno a triangoli sferici; ci permettiamo tale osservazione perchè Pappo ha indicate delle dimostrazioni per le proposizioni 5ª e 6ª del III Libro (1) ove è tratto profitto dalla considerazione di triangoli sferici: così facendo il commentatore, non si è ispirato al suo autore, ma a geometri posteriori, e prima di tutti a quello che incontriamo ora.

Menelao d' Alessandria.

33. Il punto culminante della Sferica è, nell'antica letteratura dei Greci, rappresentato da Menelao, personaggio imperfettamente conosciuto, il quale fece delle osservazioni astronomiche durante il primo anno del regno di Trajano (98 dell' E. v.) (2) e compose un libro di Astronomia per incarico di Domiziano (51-96 dell'E. v.) (3). Egli è autore di un trattato in sei libri sul calcolo delle corde di un cir-

---

(1) Ed. Hultsch, p. 480 e seg.

(2) Suter-Fihrist, p. 19.

(3) Almagesto ed. Halma, T. II (Paris, 1816, p. 24 e 26) Ivi Menelao è indicato col nome di Μενέλαος ὁ γεωμέτρης.

colo, il quale, a quanto afferma Teone Alessandrino (1) segna lo stadio intermedio nello sviluppo che ebbe siffatto calcolo da Ipparco a Tolomeo; tale trattato deve considerarsi irremissibilmente perduto, e lo stesso può ripetersi riguardo ad un' altra opera a cui confusamente allude Pappo (2). Superstiti invece, nella sostanza se non nella forma, sono tre libri sulla Sferica, i quali ci pervennero attraverso traduzioni arabe ed ebraiche, e che ora possediamo in veste latina per merito del Maurolico (3) e dell' Halley (4).

L'esame dello scritto geometrico di Menelao mostra come ai suoi tempi — forse per merito principale, ma certamente non per opera esclusiva di lui (5) — la teoria delle figure tracciate su una sfera avesse già assunto quei lineamenti spiccati che era destinata a conservare sempre e che si può dire derivino dalla perfetta analogia che essa presenta colla geometria del piano, quando si convenga di far corrispondere alle rette le circonferenze dei circoli massimi (6). In conseguenza, per esempio, alle proprietà dei triangoli piani — prescindendo da quelli in cui intervengono rette fra loro perpendicolari — ne corrispondono altrettante concernenti figure non meno importanti, i " triangoli sferici ", a cui Menelao per primo diede un nome speciale (ἐν τοῖς σφαιρικοῖς τρίπλευρον) Benchè tale analogia non venga dichiarata in generale dal geometra greco di cui parliamo, pure è impossibile negare che egli ne fosse pienamente consapevole, dopo avere accuratamente esaminato il suo I libro del quale le proposizioni 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 23 corrispondono a quelle del I libro di Euclide che (nell'edizione dell' Heiberg) portano i numeri 2, 23, 5, 6, 4, 22, 21, 19, 24, 18, 16

---

(1) Ed. Halma, T. I, p. 110.

(2) Ed. Hultsch, p. 602. Ivi Menelao è designato così: Μενελαος ὁ 'Αληξανδρεύς.

(3) *Theodosii Sphaericorum Elementorum libri III, ex traditione Maurolyci Messanensis Mathematici. Menelai Sphaericorum Lib. III ex traditione ejusdem etc.* (Messanae, 1558). Riguardo alle fonti a cui attinse Maurolico nel comporre quest'edizione (che è quella di cui ci serviamo) vedi la dissertazione di F. Macrì, *F. Maurolico nella vita e negli scritti* (p. 66-67) che fa parte nel volume *Commemorazione del IV Centenario di Francesco Maurolico* MDCCCXCIV (Messina, tip. d'Amico).

(4) *Theodosii Sphaericorum Lib. III et Menelai Sphaericorum* Lib. III (Okon., 1758).

(5) V. quanto scrivemmo intorno a Teodosio nel n. prec.

(6) È l'idea madre dei *Principes de la trigonometrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits* di Eulero (Hist. de l'Acad. de Berlin, 1753).

e 26; mentre un corollario della 2ª di Menelao corrisponde alla 15ª di Euclide. Arrogi che Menelao non solo considera esplicitamente cinque (Libro I, prop. 5, 23, 24, 25 e 36) ed implicitamente anche il sesto (Prop. 8) dei casi di eguaglianza di due triangoli sferici, ma istituisce anche il paragone fra due tali triangoli aventi eguali soltanto due coppie di elementi. Finalmente a Menelao non sono ignoti i limiti oltre i quali cessa l' analogia fra i triangoli piani e gli sferici; per esempio, non esistendo nella geometria sferica un teorema analogo a quello che dà la somma degli angoli di un triangolo piano, egli trova almeno che tale somma è compresa tra due e sei retti; così egli trova che, mentre il segmento rettilineo congiungente i punti medî di due lati di un triangolo piano è eguale alla metà del terzo lato, in un triangolo sferico l'arco di circonferenza massima che unisce i punti medî di due lati di un triangolo sferico è maggiore della metà del terzo lato. Che poi egli abbia almeno intravveduto che in un triangolo sferico, in opposizione a quanto accade nei triangoli piani, esiste un legame tra le lunghezze assolute dei lati e le ampiezze degli angoli, è dimostrato, fra l'altro, dalle Prop. 17 e 18 del I Libro, le quali affermano che un triangolo sferico ha tutti i suoi angoli ottusi (o acuti) se i suoi lati sono minori (o risp. maggiori) di un quadrante.

34. Le proposizioni esposte nel II Libro della *Sferica* di Menelao sono assai più complicate ma molto meno importanti di quelle che si leggono negli altri due. Le scarsissime applicazioni che ricevono e l' essere desse in parte corollarî delle precedenti ed in parte lemmi per le seguenti, fece sì che, mutato l' assetto della geometria sferica, esse caddero in un meritato oblìo da cui noi non tenteremo di toglierle.

Invece nei migliori trattati di geometria si ritrova la sostanza del III libro. Il quale si apre con l' enunciato di un teorema che ora riferiremo, scrivendo però per brevità sempre *sen* x invece di $\frac{1}{2}$ *corda* $2x$: “ Sopra una sfera sono tracciati (fig. 4ª) due archi di circolo massimo $\alpha\beta, \alpha\gamma$ entrambi minori di una semicirconferenza, ed altri due $\gamma\delta$ e $\beta\varepsilon$ terminati ai due primi e segantisi in ξ; si avrà

$$\frac{\text{sen } \gamma\varepsilon}{\text{sen } \varepsilon\alpha} = \frac{\text{sen } \gamma\zeta}{\text{sen } \zeta\delta} \cdot \frac{\text{sen } \delta\beta}{\text{sen } \beta\alpha} \text{ ».}$$

Il lettore ravviserà tosto in questa proposizione quella oggi chiamata " teorema di Menelao „, applicata al triangolo $\alpha\gamma\delta$ segato dalla trasversale $\beta\gamma\varepsilon$ (1). Il geometra greco aggiunge che si avrà pure:

$$\frac{\text{sen}\ \gamma\alpha}{\text{sen}\ \alpha\varepsilon}=\frac{\text{sen}\ \gamma\delta}{\text{sen}\ \delta\zeta}\cdot\frac{\text{sen}\ \zeta\beta}{\text{sen}\ \beta\varepsilon},$$

come si riconosce considerando il triangolo $\gamma\varepsilon\zeta$, in uno alla trasversale $\alpha\delta\beta$. Egli dimostra il suo teorema premettendo l'analogo della geometria del piano (2), e servendosi degli altri lemmi seguenti:

" Dati (fig. 5ª) sulla periferia di un cerchio di centro ε tre punti α, β, γ e chiamata δ la intersezione della corda $\alpha\gamma$ col raggio $\beta\varepsilon$ si avrà:

$$\frac{\alpha\delta}{\delta\gamma}=\frac{\text{sen}\ \alpha\beta}{\text{sen}\ \beta\gamma}.$$

Se (fig. 6ª) ω è un punto del diametro $\lambda\mu$ di un cerchio di centro ε e $\alpha\beta$ è una corda passante per ω, detti δ e γ i piedi delle perpendicolari abbassate da α e β sul diametro $\lambda\mu$, si avrà la relazione:

$$\frac{\alpha\omega}{\beta\omega}=\frac{\text{sen}\ \alpha\lambda}{\text{sen}\ \beta\mu}\text{ ».}$$

Non entriamo in minuti particolari sui ragionamenti adoperati da Menelao perchè li ritroveremo nell' *Almagesto* di Tolomeo (n. 43), e preferiamo farne l' analisi su un testo originale che sopra uno giuntoci attraverso traduzioni e ritraduzioni.

Applicando il suo teorema fondamentale, Menelao, col mezzo di opportune considerazioni sulla figura, perviene a nuove proposizioni che importa quì registrare. La prop. 3.ª dice che " se nei due triangoli sferici $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ sono eguali o supplementari tanto gli angoli α, γ quanto gli angoli δ, ζ si ha:

$$\frac{\text{sen}\ \alpha\beta}{\text{sen}\ \beta\gamma}=\frac{\text{sen}\ \delta\varepsilon}{\text{sen}\ \varepsilon\zeta}\text{ »;}$$

---

(1) Delambre crede appartenga ad Ipparco (*Hist. de l' astronomie ancienne*, T. I, p. 245), contrariamente all'affermazione seguente di Maurolico « notandum est, quod haec prima propositio, et quatuor lemmata ad ejus demonstrationem attinentia, sunt inventa Menelai » (ed cit. p. 37).

(2) Ricordiamo (L. II, n. 25) che Chasles suppone che questo fosse applicato da Euclide ne' suoi *Porismi* (*Les trois livres des Porismes d' Euclide*, Paris, 1860, p. 107).

questo appare a noi per un immediato corollario del *teorema dei seni,* ma il geometra greco, ignorando questa proposizione, era costretto a dimostrarlo direttamente.

La prop. " se $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ sono due triangoli rettangoli risp. in α e δ ed aventi uguali gli angoli acuti γ, ζ, si avrà:

$$\text{tg}\, \alpha\beta = \text{tg}\, \delta\varepsilon \,.\, \frac{\text{sen}\, \alpha\gamma}{\text{sen}\, \delta\zeta} \text{»;}$$

si deduce da essa; così dicesi dell' altra: " Se due triangoli sferici $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$ hanno eguali tanto gli angoli α, δ quanto gli angoli γ, ζ e si abbassano gli archi $\beta\lambda$, $\varepsilon\mu$ risp. perpendicolari a $\alpha\gamma$, $\delta\zeta$, si avrà:

$$\frac{\text{sen}\, \alpha\lambda}{\text{sen}\, \lambda\gamma} = \frac{\text{sen}\, \delta\mu}{\text{sen}\, \mu\zeta} \text{».}$$

Mentre questi teoremi, forse perchè appajono oggi come semplici conseguenze di altri più generali ed importanti, ebbero vita effimera, uno ve n'è nel III della *Sferica* di Menelao (il 7.°) che esprime una delle relazioni fondamentali tra gli elementi di un triangolo sferico rettangolo. È quello che può enunciarsi come segue: " se $\alpha\beta\gamma$ è un triangolo sferico rettangolo in γ si avrà

$$\frac{\text{sen}\, (\alpha\beta + \alpha\gamma)}{\text{sen}\, (\alpha\beta - \alpha\gamma)} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \text{»;}$$

si vede subito che quest' equazione si riduce all' altra

$$\text{tg}\, \alpha\gamma = \text{tg}\, \alpha\beta \,.\, \cos \alpha$$

epperò dice che in ogni triangolo sferico rettangolo si ha:

$$\text{tg cateto} = \text{tg ipotenusa} \times \text{cos ang. acuto compreso.}$$

La dimostrazione di Menelao merita di venir qui riprodotta nella sostanza:

Sia (fig. 7.ª) $\alpha\beta\gamma$ un triangolo sferico rettangolo in γ ed avente gli altri due angoli acuti. Si descriva sulla data sfera il cerchio di centro α e raggio $\alpha\beta$ e se ne determinino le intersezioni δ, ε col lato $\alpha\gamma$, prolungato se occorre; ω sia il centro della sfera considerata. Si conducano le rette $\delta\varepsilon$ ed $\omega\alpha$ e se ne determini la intersezione ζ; il raggio $\omega\alpha$ sarà la intersezione dei piani dei due circoli $\alpha\beta$ e $\alpha\gamma$, mentre $\beta\zeta$ e $\delta\varepsilon$ sono le intersezioni di questi medesimi piani col piano $\beta\delta\varepsilon$. Si conduca anche il raggio $\omega\gamma$ e se ne trovi la intersezione τ con $\delta\varepsilon$, poi si unisca β a τ. Essendo i piani $\beta\gamma$ e $\beta\delta\varepsilon$ perpendicolari entrambi al piano $\alpha\gamma$, la loro intersezione $\beta\zeta$ è pure perpen-

dicolare al piano $\alpha\gamma$ e quindi alla retta $\alpha\omega$ che sta in esso. Inoltre la retta $\delta\zeta$ sta nel piano $\alpha\gamma$ ed è perpendicolare alla $\alpha\omega$. Dunque l'angolo $\beta\zeta\delta$ è l'angolo rettilineo del diedro avente per facce i piani $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$. Osservando ora che il punto ζ è il punto medio della corda $\delta\varepsilon$ e ricordando che gli archi $\alpha\beta$, $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$ sono fra loro eguali, in forza di uno dei lemmi surriferiti si avrà

$$\frac{\operatorname{sen} \gamma\varepsilon}{\operatorname{sen} \gamma\delta} = \frac{\varepsilon\tau}{\delta\tau} \quad \text{ossia} \quad \frac{\operatorname{sen}(\alpha\beta + \alpha\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha\beta - \alpha\gamma)} = \frac{\varepsilon\tau}{\delta\tau};$$

ma, essendo il raggio della sfera eguale ad 1, si ha

$$\frac{\varepsilon\tau}{\delta\tau} = \frac{\varepsilon\zeta + \zeta\tau}{\varepsilon\zeta - \zeta\tau} = \frac{1 + \cos\beta\zeta\tau}{1 - \cos\beta\zeta\tau} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

Dunque

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha\beta + \alpha\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha\beta - \alpha\gamma)} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} \quad c.d.d.$$

Notiamo ancora nella *Sferica* di Menelao il seguente teorema: " in ogni triangolo sferico, la bisettrice di un angolo qualunque divide il lato opposto in due parti i cui seni sono proporzionali ai lati dell'angolo " (Prop. 10ª), del quale il geometra greco dà una dimostrazione indipendente dal teorema dei seni ed espone molte applicazioni. Scegliamo fra queste il seguente teorema (il quale esprime la proprietà armonica di uno speciale fascio di quattro cerchî massimi): " se $\alpha\beta\gamma$ è un triangolo sferico rettangolo in β e se gli archi $\beta\delta$, $\beta\varepsilon$ condotti dal vertice β al lato opposto fanno angoli eguali col lato $\beta\alpha$, si avrà:

$$\frac{\operatorname{sen} \gamma\varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \gamma\delta}{\operatorname{sen} \delta\alpha} \text{ » (prop. 17).}$$

Completeremo questo mosaico che venimmo intarsiando col mezzo di proposizioni tolte alla *Sferica* di Menelao, citando tre proposizioni le quali confermano quanto già dicemmo riguardo alla cognizione da parte degli antichi dell'analogia fra triangoli piani e triangoli sferici; sono quelle (20ª, 21ª, 22ª) che affermano essere concorrenti in un punto tanto gli archi di circolo massimo bisettori degli angoli interni di un triangolo sferico, quanto i tre archi analoghi abbassati dai vertici perpendicolarmente ai lati opposti e quelli che uniscono i vertici ai punti medî dei lati opposti.

Emerge da quanto esponemmo che i tre libri di Menelao contengono molte cose belle e buone, parecchie delle quali anzi, sino a prova contraria, devono dirsi opera sua; se un astronomo esclu-

sivista asserì che " ces théorèmes sont presque tous de pure spéculation et d'un usage presque nul pour la pratique (1) ", chi ama la scienza per sè stessa può replicare che tale criterio per giudicare dannerebbe all'indifferenza, assieme allo scritto di Menelao, quelli di innumerevoli altri geometri.

35. Risulta anche dall'esame della *Sferica* che Menelao non fu un semplice astronomo osservatore, ma ebbe spiccate qualità di geometra: ora tale giudizio è confermato da altre sue indagini di cui è rimasta qualche traccia.

Anzitutto Proclo (2) cita una dimostrazione data da lui pel teorema di Euclide (*Elementi,* Lib. I, Prop. 25ª): " Se due triangoli hanno due lati dell'uno rispettivamente eguali a due lati dell'altro, ma diseguali gli angoli compresi, avranno diseguali anche i terzi lati ed il lato maggiore sarà opposto all'angolo maggiore ".

Inoltre Pappo (3) attribuisce a Menelao la scoperta, od almeno lo studio, di una certa curva da lui chiamata *straordinaria* o *mirabile* (παράδοξος γραμμή). Qual era la definizione di tal curva? quali considerazioni avevano indotto a considerarla? quali prerogative erano state in essa ravvisate? Sono queste questioni importanti, a cui invano si tenterebbe di porgere una risposta non riboccante di congetture. Fermat arbitrariamente identificò la curva di Menelao colla spirale rappresentata dall'equazione $\rho^2 = a\varphi$ (4); ma Chasles osservò (5) che dalle parole di Pappo sembra emergere che la curva di Pappo fosse a doppia curvatura; opinione questa che venne abbracciata da P. Tannery (6), il quale, ritenendo che le proprietà mirabili della curva di Menelao si riferissero alla quadratura (se non alla costruzione della tangente), emise timidamente la ipotesi che essa curva fosse la celebre *curva di Viviani* (7), intersezione di una sfera con un cilindro ad essa tangente ed avente per diametro

(1) Delambre, *Hist. de l'astr. anc.* T. I, p. 243.

(2) Proclo-Taylor, T. II, p. 136.

(3) Ed. Hultsch, p. 270.

(4) Lettera al P. Mersenne del 3 giugno 1636, V. *Oeuvres de Fermat,* (ed. Tannery et Henry) T. II, Paris 1894, p. 13.

(5) *Aperçu historique* etc. (II ed., Paris, 1875) p. 26.

(6) V. la chiusa del § III delle *Notes pour l'histoire des courbes et des surfaces dans l'antiquité* (Bull. des Sc. math. et astr., T. VII e VIII).

(7) Cfr. l' *Enigma geometricum* proposto da questo geometra in *Acta erud.* 1692, p. 274.

della base il raggio della sfera: chi ricordi le investigazioni di Eudosso sopra la ippopeda (v. n. 16) e tenga conto di certe indagini sopra una notevole curva sferica che si incontrano in Pappo (v. L. IV, n. 12), converrà con noi che nulla abilita a negare a Menelao la conoscenza della curva di Viviani. Tanto più che a questa medesima linea si arriva cercando di “ descrivere (mediante un compasso a gambe curve) sopra un cilindro una curva che appartenga ad una sfera, abbia il centro sul cilindro ed un'area esattamente determinabile „ (1); a tale questione è probabile si pensasse nell'antichità dopo che si videro vani gli sforzi per quadrare il circolo, ma coronati da buon successo quelli intesi a determinare

---

(1) Per giungere alla linea cercata con metodi moderni, si consideri la intersezione del cilindro

$$x^2 + y^2 = r^2$$

con la sfera

$$(x - r)^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Posto

$$x = r \cos \varphi \,, \; y = r \operatorname{sen} \varphi \,,$$

l'elemento di area sul cilindro sarà dato da

$$dS = r \, d\varphi \, dz.$$

I punti dell'intersezione delle due superficie soddisfanno la equazione

$$4 r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} + z^2 = R^2,$$

onde per ottenere l'area della porzione del cilindro che è interna alla sfera basta calcolare l'espressione:

$$S = 2r \int\int d\varphi \, dr$$

ove l'integrale va preso fra i limiti

$$\varphi = o \qquad \text{e} \qquad \varphi = \pi$$

$$z = -\sqrt{R^2 - 4r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \qquad \text{e} \qquad z = +\sqrt{R^2 - 4r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\,.$$

Si ha quindi:

$$S = 4r \int_{\varphi = o}^{\varphi = \pi} \sqrt{R^2 - 4r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}} \, d\varphi.$$

S dipende in generale da integrali ellittici, tranne però se

$$R = 2r.$$

In allora

$$S = (4 r)^2,$$

cioè S è eguale al quadrato avente per lato il doppio del diametro del dato cilindro. Come appunto trovò il Roberval.

delle lunule aventi l'area assegnabile in termini finiti. Il fatto che questo bel problema si è presentato a Roberval, il quale seppe risolverlo con mezzi elementari (1), giungendo così a concepire la curva detta *ciclo-cilindrica,* può suffragare la ipotesi che altrettanto abbiano fatto gli antichi. Tuttavia, siccome nessun documento attesta che essi abbiano fatto tal passo importante, così il problema storico di determinare qual fosse la curva mirabile di Menelao appartiene tuttora alla categoria di quelle che l'avvenire è chiamato a risolvere.

III.

L' apogeo dell' Astronomia greca.

Ipparco e Tolomeo.

36. In tre grandi opere, divise ciascuna in tredici libri, la Grecia tramandò ai posteri più lontani notizia del proprio sapere in geometria, in astronomia ed in aritmetica; degli *Elementi* di Euclide (che è la prima di tali opere) trattammo nel Libro precedente (n. 7-24), mentre l' esame della terza (l'*Aritmetica* di Diofanto) sarà il precipuo fine del Libro V: ora dobbiamo occuparci di quella che concerne la scienza del cielo (2).

Lo studio del maggior codice astronomico che la Grecia ci ha legato è della massima importanza, non soltanto perchè la letteratura greca non contiene alcuna opera congenere anteriore — esclusi il poema astronomico di Arato (v. n. 25) ed il commento critico di cui lo corredò Ipparco da Nicea (3) — ma anche perchè è l'unica fonte a cui possono aversi informazioni intorno al suo celebre autore: Claudio Tolomeo (4). Si apprende così che questi fece delle osserva-

---

(1) *Traité des Indivisibiles* (Mém. de l' Acad. roy. des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699, T, VI, Paris 1730), p. 241 e seg.

(2) Va notato che secondo le indicazioni date dal T. I del *Catalogus Codicum manuscriptorum Bibliothecae Regiae* (Parisis MDCLXXIX) esisterebbero due codici dell'*Almagesto* in quattordici libri. Cfr. *Oeuvres complètes de Huygens*, T. V (La Haye 1893, p. 181).

(3) Cfr. Delambre, *Hist. de l'astr. anc.* T. I, p. 106-189.

(4) I dati cronologici relativi a Tolomeo si trovano raccolti e discussi nelle *Studien über Klaudius Ptolemäus* (Leipzig 1894) di F. Boll; ivi l'autore conclude essere le probabili date estreme dell' esistenza del generale astronomo l' anno 100 ed il 178 dell'E. v.

zioni astronomiche tra il 125 ed il 151 dell'E. v. (mentre Ipparco ne aveva fatte a Rodi tra il 161 e il 126 a. C.); quando avremo aggiunto che Tolomeo è posteriore a Proclo, dal quale è citato, avremo detto tutto quello che si conosce di sicuro intorno alla esistenza del grande astronomo (1).

La grande ammirazione che suscitò l'*Opus magnum* di Claudio Tolomeo è dimostrata dal fatto che ben presto il suo titolo originario Μαθηματικὴ σύνταξις venne mutato in Μεγάλη σύνταξις, usato fin dai tempi di Teone Alessandrino e da cui proviene il nome *Magna constructio* tanto frequentemente usato. Tale ammirazione fu condivisa dagli Arabi, i quali intrapresero la traduzione di esso (2) fin dai tempi di Harûn Arraschid (786-809), e, congiungendo l'articolo *Al* della loro lingua al superlativo μέγιστος, diedero la vita alla ibrida parola *Al-Midschisṭî*, con cui designarono l'opera di Tolomeo. Da essa derivò il nome *Almagesto* con cui è volgarmente chiamata in Europa, dopo che Gherardo da Cremona la tradusse in latino nel 1175, servendosi di un manoscritto esistente in una biblioteca di Toledo. Ritrovatosi poi il testo originale, nel 1538 ne venne fatta una pregevole edizione (3), a cui altre poi seguirono, la migliore e maggiormente diffusa delle quali è quella curata dall'abate Halma (4), ove si trovano, oltre il testo, una buona versione francese e degli utili commenti, alcuni dovuti a Delambre.

37. Il I Libro dell'*Almagesto* contiene i preliminari indispensabili ad uno studio razionale dei fenomeni celesti, in base all'ipotesi che oggi considerasi come caratteristica del sistema tolemaico, cioè all'ipotesi che il sole — il cuore dell'universo, secondo Teone

---

(1) Escludiamo, ben inteso, i particolari somministrati dagli Arabi, non essendo che il prodotto dell'ardente fantasia dei popoli orientali e meridionali. V. *Fihrist*, p. 19 e 22.

(2) Due fra tali traduzioni si contesero il primato: v. M. Klamroth, *Ueber die Auszüge der griechischen Schriftsteller bei al-Ja'qûbi* (Zeitschr. der deutsch morgenländ. Ges. T. XLII, 1888, p. 17).

(3) *Claudii Ptolomaei Magna Constructionis. Lib. XIII* (Basileae apud J. Vvaldervon, MDCXXXVIII).

(4) *Composition mathématique de Claude Ptolomée traduite pour le première fois du Grec en Français* par M. Halma, T. I. Paris 1813, T. II, 1816. È questa l'edizione di cui ci serviamo e che citiamo sempre coll'abbreviatura *Almagesto ed. Halma.* Alcune varianti alla lezione di Halma vennero suggerite da F. Hultsch nella nota *Zur Syntaxis des Ptolemaios* (Jahrb. für Phil., 1893, p. 748-752). Un'edizione critica venne ai dì nostri intrapresa dall'Heiberg; ne apparve già un volume nella *Bibliotheca Teubneriana.*

Smirneo, la *lucerna mundi* di Copernico — ruoti attorno alla terra. Il II Libro è dedicato alla esposizione della divisione del cielo in zone e del modo in cui gli astri si levano e tramontano. La lunghezza dell'anno e la teoria del sole dànno materia al III Libro, la lunghezza dei mesi e la teoria della luna al IV; ivi si trovano le prime applicazioni della teoria degli eccentrici e degli epicicli, i cui germi risalgono alla scuola di Pitagora e si ritrovano in quella di Platone, ma il cui pieno sviluppo è, secondo la opinione di alcuni (1), opera precipua di Apollonio Pergeo (2). Dal V Libro dell'*Almagesto* si impara la costruzione dell'astrolabio (3) e dal VI quali fenomeni portino i nomi di congiunzioni ed opposizioni del sole e della luna e quali relazioni essi abbiano colle eclissi. I due libri successivi sono consacrati alle stelle fisse ed alla precessione degli equinozi; e gli ultimi alla teoria dei cinque pianeti, Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno.

Non esporremo con maggiori particolari l'architettura dell'*Almagesto* (4), giacchè, se giudicammo necessario segnalare le ipotesi e le principali osservazioni che gradatamente trasformarono l'astronomia da una congerie di fatti isolati ad una scienza degna di tal nome, che successivamente indussero gli scienziati ad approfondire certi rami ausiliari della matematica pura, non riteniamo competa allo storico della geometria il redigere un completo bilancio dell'eredità che i Greci tramandarono agli astronomi futuri col mezzo dell'*Almagesto*. Una tale minuziosa esposizione sarebbe forse consigliabile ed utile ove conducesse a misurarne il progresso che Tolomeo segna sopra i suoi predecessori; ma a tale risultato essa non guiderebbe, giacchè pressochè tutti i lavori astronomici anteriori all'*Almagesto* andarono perduti ed inoltre Tolomeo, al pari degli scienziati coevi, ignorò l'onesto sistema delle esatte citazioni, cosicchè, colle scarse indicazioni da lui fornite e senza introdurre elementi conget-

(1) Cfr. P. Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (Paris 1893), p. 58. Più riservato è lo Schiaparelli (v. *Origine del sistema* ecc. p. 73).

(2) L'abilità astronomica di questo grande geometra era notoria nell'antichità, lo prova ad es. il fatto, ricordato da Tolomeo Efestione, che i suoi lavori sulla luna gli avevano fatto dare nel Museo di Alessandria il soprannome di *epsilon* (cfr. anche L. II, n. 52).

(3) Specie di sfera armillare.

(4) Notizie meno sommarie si trovano nel II Vol. dell'*Hist. de l'astr. ancienne* del Delambre (Paris 1817, p. 67-410) e nelle precitate *Recherches* del Tannery.

turali, non si potrebbe ricostruire l' astronomia greca anteriore a Tolomeo (1). A questo punto di rassomiglianza fra l' *Almagesto* e gli *Elementi*, ne fa riscontro uno fra Tolomeo ed Euclide: giacchè, sia notando che Tolomeo, pur vivendo ad Alessandria, effettuò i suoi calcoli sopra numeri relativi al parallelo di Rodi (luogo ove osservò Ipparco), sia leggendo attentamente le sue opere (e fors' anche la sola prefazione!), si acquista la convinzione che si è in presenza, non di un Copernico, di un Keplero, di un Galileo, ma di un osservatore diligente ed acuto, nell' atto di raccogliere con amorosa cura i frutti dei lavori più antichi, di coordinarli e correggerne le imperfezioni: or non spicca forse così una fisonomia di scienziato analoga a quella che già riscontrammo in Euclide?.. (2).

38. L' immenso interesse che ha per noi l' *Almagesto* è dovuto, in tesi generale, all' indirizzo prettamente matematico che esso possiede, ma in particolare all' essere il primo lavoro in cui trovasi esposta ed applicata la trigonometria, piana e sferica; sgraziatamente Tolomeo ne fa conoscere solo quel tanto che è indispensabile per conseguire il fine a cui egli mirava (3), sicchè la trigonometria dei Greci non si può identificare con ciò che risulta adunando tutto quello che trovasi nell' *Almagesto*, e sarebbe ingiusto e pericoloso il sistema di negare agli antichi la conoscenza di quelle proposizioni che Tolomeo non ha registrate nella sua *Composizione matematica* (4).

Fu detto che la trigonometria tolemaica è profondamente differente da quella di cui ci serviamo noi, perchè è indipendente dall' uso di funzioni circolari; ora di tale asserzione la portata è molto più limitata di quanto si può credere, giacchè se — uniformandosi al

---

(1) Il Delambre aveva dapprima creduto (v. op. cit. T. II, p. 67) che a Tolomeo appartenesse tutto ciò che egli espone diffusamente, ed ai suoi predecessori il resto; ma non tardò a ravvisare la fallacia di questo criterio.

(2) Paragonando anzi alcune parti dell' *Almagesto* col Libro III della *Sferica* di Menelao, sembra che Tolomeo, al pari di Euclide, avesse per principio di mutare il meno possibile nei lavori dei predecessori.

(3) Per essere tale scopo pratico, Tolomeo soppresse in ogni teorema la protasi, limitandosi all' ectesi (enunciazione del teorema sulla figura).

(4) L' interessante problema di divinare la trigonometria dei Greci fu tentato da un professore del Collegio di Francia, Maurizio Bressieu, in un' opera oggi dimenticata (*Metrices astronomicae*, libri IV, Parisiis 1581); fu ripreso poi — e risolto in modo più geniale che verosimile — dal Delambre (v. l' *Histoire* più volte citata e le note all' *Almagesto, ed. Halma*).

precetto dei matematici Indiani — nelle proposizioni trigonometriche dell' *Almagesto* si sostituisce alla corda di un arco qualunque il doppio del seno dell'arco metà (1) si ricade nelle proposizioni dell'ordinaria trigonometria. Non vogliamo con ciò negare che l'assenza della nozione di *seno* e la conseguente circonlocuzione necessaria per indicare un *coseno*, nonchè la mancanza del concetto delle altre funzioni trigonometriche, di simboli per designarle e di un algoritmo per combinarle, rendano il procedere tolemaico assai differente dal nostro; ma è questa una differenza che rimane all'epidermide, non penetra sino al midollo della teoria, è una differenza dello stesso genere di quella che intercede tra l'algebra moderna e l'algebra geometrica degli antichi (v. l' *Appendice* al L. II).

La creazione della trigonometria nell'antichità provenne dalla necessità di avere a propria disposizione una tavola delle lunghezze che hanno le corde di tutti gli archi multipli di una parte aliquota della circonferenza. Questo bisogno fu avvertito, se non prima, da Ipparco, al quale si attribuisce un' opera in dodici libri sul calcolo delle corde di un circolo (2); per tal fatto ad Ipparco venne da molti attribuita la invenzione della trigonometria, da molti, ma non da tutti. Infatti uno storico eminente osserva: “ In seguito alle ricerche di Archimede sul rapporto della circonferenza al diametro (3) vennero eseguiti dei calcoli, forse già cominciati dal geometra di Siracusa, per determinare le corde dei varî archi. Tali calcoli condussero, da un lato a stabilire delle formole approssimative che s'incontrano negli scritti attribuiti ad Erone d'Alessandria, e da un altro lato alla costruzione di tavole. Essi vennero ripresi da Apollonio (4), il quale determinò con maggiore precisione il valore 3,1416 da attribuirsi alla circonferenza quando se ne prenda il diametro per unità, e, più tardi, dai geometri d'Alessandria, contemporanei ad Ipsicle, quando venne introdotto il sistema sessagesimale (5). — D'altronde Apol-

(1) Cfr. quanto già facemmo nel nostro resoconto della *Sferica* di Menelao (n. 34).

(2) « Ipparco aveva esposto in dodici libri il metodo per trovare le rette iscritte nel cerchio. Menelao trattò pure questa materia in sei libri. Ma non si può a meno di ammirare la facilità con cui Tolomeo, mediante alcuni teoremi semplici e poco numerosi, perviene a trovare tali valori ». *Teone ed. Halma,* T. I, p. 110.

(3) V. L. II, n. 43.

(4) V. L. V.

(5) V. n. 29.

lonio stabilì dei metodi che permettono di calcolare gli archi sulla sfera usando quelle tavole di corde, partendo dal teorema fondamentale delle trasversali. Un tale sviluppo delle varie conseguenze di un solo principio non sembra in realtà potere essere attribuito che ad un genio matematico potente quanto il geometra di Perga; ciò inoltre è conforme alle sue abitudini intellettuali. Ipparco, trovando il terreno così preparato, calcolò delle tavole più esatte di tutte quelle che erano state redatte prima di lui ed a cui egli diede la forma che divenne poi classica grazie alla superiorità di queste tavole ed alle applicazioni che ne vennero fatte (1) „. Tale schizzo storico sulla genesi della trigonometria contiene molti elementi ipotetici, che il lettore ravviserà tosto, anche senza il nostro ajuto; tuttavia presenta indiscutibili caratteri di verosimiglianza che auguriamo possano accrescersi con ulteriori ricerche. A noi basti di averne fatto cenno, prima di esporre in qual modo Tolomeo procede nella costruzione di una tavola di corde.

Per la facilità della pratica — egli dice — (2) noi costruiremo ora una tavola di queste rette, dividendo la circonferenza in 360 parti. Tutti gli archi della nostra tavola andranno crescendo di mezzo grado ciascuno, e noi daremo per ognuno di questi archi il valore della corda (suttendente) supponendo il diametro diviso in 120 parti. Si vedrà coll'uso essere questo il numero più comodo che si potesse scegliere. Mostreremo dapprima come mediante un certo numero, il minimo possibile (3), di teoremi, che sono sempre gli stessi, si possa comporre un metodo generale e sollecito per trovare quei valori. Non ci limiteremo a presentare le tavole dove sono raccolti questi valori senza insegnarne la teoria, ma renderemo agevole il modo di trovarli e verificarli esponendone il metodo di costruzione. Adopereremo in generale la divisione sessagesimale per evitare le frazioni; e nelle moltiplicazioni e divisioni prenderemo sempre i valori più approssimati, sicchè anche quello che trascureremo non impedirà che essi siano sensibilmente esatti.

Ora la determinazione metrica fondamentale nel metodo di calcolo esposto da Tolomeo è contenuta nella seguente proposizione: (4)

“ Sia (fig. 8.ª) ΑΒΓ un semicerchio di diametro ΑΓ e di centro Δ, sia ΔΒ il raggio perpendicolare a ΑΓ, Ε il punto medio del raggio ΔΓ e Ζ un punto del raggio ΔΑ tale che si abbia $EZ = EB$. Con-

(1) P. Tannery, *Recherches sur l'histoire etc.* p. 67.

(2) *Almagesto, ed. Halma*, T. I. p. 26.

(3) Ciò prova (in conformità con quanto diremo innanzi) che non sono gli unici noti a Tolomeo.

(4) Op. cit., p. 26-27.

dotta la retta BZ, sarà ΔZ eguale al lato del decagono e BZ a quello del pentagono iscritti nel dato cerchio „.

La verità di questa proposizione si palesa subito osservando che, detto R il raggio del dato cerchio, in forza della costruzione indicata, sussistono le relazioni:

$$\Delta Z = R\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad BZ = R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2};$$

Tolomeo le dimostra servendosi dell' algebra geometrica ed applicando due teoremi di Euclide (Lib. II, prop. 6, e Lib. XIII, prop. 9).

Supponendo, come già si disse, che il raggio sia 60 parti, cioè facendo $R = 60^p$, si deduce

$$\Delta Z\ (= \overline{\lambda\varsigma}\ .\ \delta'\ .\ \nu\varepsilon'') = 37^p\ .\ 4'\ .\ 55''$$

e quindi

$$BZ\ (= \bar{o}\ .\ \lambda\beta'\ .\ \gamma'') = 70^p\ .\ 32'\ .\ 3''.$$

Va notato che Tolomeo, a somiglianza di quanto fece Archimede in casi analoghi (v. L. II n. 43), non espone i particolari del calcolo aritmetico necessario per giungere a queste conclusioni, ma si limita ad asserire che, estraendo certe radici quadrate, si ottengono quei risultati. Si ha dunque:

$$\text{corda } 72^\circ = 70^p\ .\ 32'\ .\ 3''$$
$$\text{corda } 36^\circ = 37^p\ .\ 4'\ .\ 55''.$$

D' altronde, essendo le corde degli archi di 60,° 90° e 120°, risp. i lati dell' esagono regolare, del quadrato e del triangolo equilatero inscritti (cfr. Euclide, Lib. XIII, prop. 12), mediante altre estrazioni di radice, si trova:

$$\text{corda } 60^\circ = 60^p$$
$$\text{corda } 90^\circ = 84^p\ .\ 51'\ .\ 10''$$
$$\text{corda } 120^\circ = 103^p\ .\ 55'\ .\ 23''.$$

Da questi valori ne derivano altrettanti notando che dal teorema di Pitagora consegue:

$$\overline{\text{corda } x^\circ}^2 + \overline{\text{corda } (180-x)^\circ}^2 = \overline{120^p}^2 ;$$

servendosi di tale osservazione per $x = 36$ si conclude

$$\text{corda } 144^\circ = 114^p\ .\ 7'\ .\ 37''.$$

40. Ma l'applicazione della stessa osservazione alle altre corde già calcolate non guida a nessun altro risultato, se non si introduce qualche nuovo elemento teorico; come tale Tolomeo sceglie quell'importantissima proprietà del quadrilatero inscritto in un cerchio che porta appunto il nome di " teorema di Tolomeo " (1); egli lo enuncia e dimostra come segue (2):

Sia (fig. 9.a) ΑΒΓΔ un quadrilatero inscritto in un cerchio; condotte le diagonali ΑΓ e ΒΔ, si avrà la seguente relazione fra rettangoli:

$$\mathrm{A\Gamma}\,.\,\mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB}\,.\,\Gamma\Delta + \mathrm{A\Delta}\,.\,\mathrm{B\Gamma}.$$

Per dimostrarlo si formi l'angolo ΑΒΕ eguale all'angolo ΔΒΓ. Sarà in conseguenza l'angolo ΑΒΔ eguale all'angolo ΓΒΕ; siccome poi sono fra loro eguali anche gli angoli ΒΔΑ e ΒΓΕ, perchè entrambi misurati dalla metà dell'arco ΑΒ, così i triangoli ΑΒΔ e ΕΒΓ sono simili e dànno

$$\mathrm{B\Gamma}\,.\,\mathrm{A\Delta} = \Gamma\mathrm{E}\,.\,\mathrm{B\Delta}.$$

Ma essendo fra loro eguali anche gli angoli ΒΑΓ e ΒΔΓ, sono eziandio fra loro simili i triangoli ΑΒΕ e ΔΒΓ, dunque è pure

$$\mathrm{AB}.\,\Gamma\Delta = \mathrm{AE}\,.\,\mathrm{B\Delta}.$$

Addizionando membro a membro due relazioni trovate si conclude subito quella che si trattava di dimostrare.

Per vedere di quale utilità essa può riuscire, si consideri (fig. 10a) il semicerchio di diametro ΑΔ ed in esso le corde ΑΒ, ΑΓ; condotte le rette ΒΓ, ΒΔ e ΓΔ nascerà una figura a cui applicando il teorema di Tolomeo si ottiene

$$\mathrm{A\Gamma}\,.\,\mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB}\,.\,\Gamma\Delta + \mathrm{A\Delta}\,.\,\mathrm{B\Gamma}.$$

Ora se si conoscono le corde ΑΒ, ΑΓ si conosceranno anche ΔΒ, ΔΓ; e siccome il diametro ΑΔ è noto, così si potrà dedurre da questa relazione la lunghezza che ha la corda dell'arco ΒΓ diffe-

---

(1) È nostro convincimento che questa proposizione non appartenga a Tolomeo; si suole attribuirla a lui soltanto perchè l'*Almagesto* è la prima opera in cui s'incontri; ma poichè Teone Alessandrino ne parla (*ed. Halma*, T. I, p. 187) circa nello stesso modo che adopera riguardo al teorema di Menelao (id. p. 232 e 238), è poco probabile che si tratti di una scoperta di Tolomeo.

(2) La dimostrazione di Tolomeo è tanto semplice ed elegante che è tuttora esposta nei trattati elementari di geometria; essa cade in difetto nel caso in cui ΒΔ sia bisettrice dell'angolo ΑΒΓ: ma a questo caso provvide Teone Alessandrino (v. più avanti, n. 49).

renza tra gli archi ΑΓ e ΑΒ: per esempio avendo già determinate *corda* 72° e *corda* 60° se ne dedurrà *corda* 12.° La relazione precedente è dunque una formola per la sottrazione degli archi; ed infatti, chiamando $2x$ e $2y$ le lunghezze degli archi ΑΒ e ΑΓ e supposto eguale a 1 il raggio del cerchio considerato, essa si muta nell'altra

$$\text{sen}\,(x - y) = \text{sen}\,x \cos y - \cos x\,\text{sen}\,y.$$

Tolomeo tratta poi anche il problema della bisezione degli archi. Si considerino infatti — egli dice (1) — nel cerchio (fig. 11ª) di diametro ΑΓ l'arco ΓΒ ed il suo punto di mezzo Δ, e si conducano le rette ΑΒ, ΑΔ, ΓΔ e ΒΔ nonchè la ΔΖ perpendicolare a ΑΓ; si porti anche sopra ΑΓ, ΑΕ = ΑΒ e si conduca ΔΕ. I triangoli ΑΒΔ e ΑΕΔ risultano evidentemente eguali, onde ΔΒ = ΔΕ; il triangolo ΓΔΕ è quindi isoscele, ΔΖ ne è l'altezza, e si hanno le relazioni:

$$\Gamma\mathrm{E} = \mathrm{A}\Gamma - \mathrm{AB}$$
$$\Gamma\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{A}\Gamma - \mathrm{AB}}{2},$$

la seconda delle quali dimostra che ΓΖ è una lunghezza data quando si conosce l'arco ΒΓ (2). Ora essendo il triangolo ΑΓΔ rettangolo in Δ si ha

$$\overline{\Gamma\Delta}^2 = \mathrm{A}\Gamma \,.\, \Gamma\mathrm{Z},$$

dunque anche ΓΔ, corda dell'arco metà di ΒΓ, è data quando si conosce la corda dell'arco intero. Tal fatto, rilevato dagli antichi, si esprime oggi nell'equazione

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

in cui si trasforma la precedente supponendo l'arco $\Gamma\Delta = 2x$.

Applicando questo importante risultato Tolomeo deduce dalla corda già trovata dell'arco di 12°, successivamente *corda* 6°, *corda* 3° e conclude da ultimo

$$\text{corda}\,\frac{3^\circ}{2} = 1^p \,.\, 34' \,.\, 15''$$
$$\text{corda}\,\frac{3^\circ}{4} = 0^p \,.\, 47' \,.\, 8''.$$

(1) Op. cit., p. 31.

(2) Le proprietà indicate da Tolomeo nella fig. 11ª sono casi particolari di quella a cui Archimede consacrò il terzo de' suoi *Lemmi* (v. L. II, n. 45).

Per completare il corredo di strumenti che gli occorrono, a Tolomeo abbisogna anche una delle formole di addizione e la desume dal suo teorema nel modo seguente. Si considerino (fig. 12ª) nel cerchio di centro Z e diametro ΑΔ gli archi consecutivi ΑΒ, ΒΓ; si conducano il diametro ΒΖΕ, e le corde ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, ΓΔ, ΒΔ e ΓΕ; si applichi poi il citato teorema al quadrilatero ΒΓΔΕ e si avrà

$$B\Delta \,.\, \Gamma E = B\Gamma \,.\, \Delta E + BE \,.\, \Gamma\Delta,$$

ossia (poichè $\Delta E = AB$ e $BE = A\Delta$)

$$B\Delta \,.\, \Gamma E = AB \,.\, B\Gamma + A\Delta \,.\, \Gamma\Delta.$$

Orbene, dati gli archi ΑΒ, ΒΓ si conoscono le corde relative nonchè le corde ΒΔ e ΓΕ; e poichè è noto ΑΔ, l'equazione precedente darà ΓΔ e quindi il triangolo rettangolo ΑΓΔ darà ΑΓ, cioè la corda dell'arco ΑΓ somma dei due ΑΒ e ΒΓ. E ciò viene espresso in linguaggio moderno dall'equazione

$$\cos x \cos y = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$$

in cui mutasi la precedente quando si faccia $AB = 2x$ e $B\Gamma = 2y$ (1).

41. L'ultimo dei teoremi di cui si serve Tolomeo per costruire una tavola di corde è una parte di quell'importante proposizione trigonometrica, che già vedemmo adoperata da Aristarco (n. 20) ed Archimede (n. 22), e che dice: " se si tracciano in un cerchio due corde qualunque, il rapporto della maggiore alla minore di esse è

---

(1) Come si vede, Tolomeo ha dedotto dal teorema che porta il suo nome le proposizioni fondamentali della teoria delle funzioni circolari; che ciò dovesse essere possibile poteva prevedersi dal momento che quel teorema esprime una relazione che passa fra quattro punti quando e solo essi quando appartengano alla stessa circonferenza, ma è suo merito di averlo fatto. Dello stesso teorema l'Hermann si è giovato (*Acta erud.*, Aug. 1703) per dimostrare le formole di moltisezione degli archi scoperte da Giovanni Bernoulli (Id. aprile 1701). Il metodo da Tolomeo adoperato fu ritrovato dal Carnot (v. *De la corrélation des figures*, Paris 1801, p. 95 e seg.; Chasles — *Ap. hist.*, 2ª ed., Paris 1875, p. 27 — cita invece, per una svista, la *Géométrie de position*), e poco dopo da N. Fergola (v. una memoria inserita nel Vol. I, 1819, degli Atti della R. Accademia di Napoli e il mio lavoro su *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce*, Genova 1892, p. 24 e seg.), coincidenza che non deve stupire perchè « il est de la nature des vérités mathématiques d'être souvent découvertes à peu près en même temps, par différents moyens et différentes personnes » (Carnot, *Géom. de position*, Paris 1803, p. 306, nota).

minore del rapporto degli archi corrispondenti „. Il ragionamento mediante cui Tolomeo ne dimostra la verità è semplice e merita di venir quì riferito, anche perchè non ne conosciamo alcun altro di pari antichità che conduca allo stesso scopo.

Siano (fig. 13.ª) AB, $B\Gamma$ gli archi dati, il secondo dei quali sia maggiore del primo. Si conducano le corde AB, $B\Gamma$, $A\Gamma$ e si uniscano i punti A, B, Γ al punto di mezzo Δ dell'arco $A\Gamma$. E sia l'intersezione delle rette $A\Gamma$, $B\Delta$; ΔZ sia perpendicolare a $A\Gamma$ e T, H siano le intersezioni del prolungamento della retta ΔZ e della corda ΔA colla circonferenza di centro Δ e raggio ΔE. Sarà

$$\Gamma\Delta = A\Delta\,,\ \Gamma E > AE$$

$$\text{sett. } \Delta ET > \text{triang. } \Delta EZ\,,\ \text{sett. } \Delta EH < \text{triang. } \Delta EA$$

epperò

$$\frac{\text{triang. } \Delta EZ}{\text{triang. } \Delta EA} < \frac{\text{sett. } \Delta ET}{\text{sett. } \Delta EH}.$$

Ma il primo di questi rapporti vale $\frac{EZ}{EA}$ ed il secondo $\frac{\text{ang } E\Delta Z}{\text{ang } E\Delta A}$, quindi

$$\frac{EZ}{EA} < \frac{\text{ang } E\Delta Z}{\text{ang } E\Delta A}.$$

Componendo si deduce da questa proporzione la seguente

$$\frac{AZ}{AE} < \frac{\text{ang } A\Delta Z}{\text{ang } A\Delta E},$$

e raddoppiando

$$\frac{A\Gamma}{AE} < \frac{\text{ang } A\Delta\Gamma}{\text{ang } A\Delta E},$$

e sottraendo

$$\frac{\Gamma E}{AE} < \frac{\text{ang } \Gamma\Delta B}{\text{ang } A\Delta B}.$$

Osservando finalmente che la retta $BE\Delta$ è la bisettrice dell'angolo B del triangolo $AB\Gamma$ si trasforma questa relazione nell'altra

$$\frac{B\Gamma}{BA} < \frac{\text{ang } \Gamma AB}{\text{ang } A\Gamma B},$$

ossia

$$\frac{B\Gamma}{BA} < \frac{\text{arco } B\Gamma}{\text{arco } AB},$$

che è appunto quanto trattavasi di dimostrare.

42. Di tale relazione Tolomeo si giova nel modo seguente: Sia *arco* $AB = \frac{3^\circ}{4}$ e *arco* $A\Gamma = 1^\circ$; sarà, in virtù di quanto si dimostrò,

$$\frac{A\Gamma}{AB} < \frac{4}{3};$$

sostituendo ad AB $\left(= corda\,\frac{3^\circ}{4}\right)$ il valore già calcolato si conclude

$$A\Gamma = \text{corda } 1^\circ < 1^p . 2' . 50'' ....$$

Se poi si suppone *arco* AB $= 1^\circ$ e *arco* $A\Gamma = \frac{3^\circ}{2}$ si trova

$$\frac{A\Gamma}{AB} < \frac{3}{2};$$

sostituendo ad $A\Gamma$ $\left(= corda\,\frac{3^\circ}{2}\right)$ il suo valore già calcolato si conclude invece

$$AB = \text{corda } 1^\circ > 1^p . 2' . 50'' ....$$

Essendo pertanto

$$1^p . 2' . 50'' .... < \text{corda } 1^\circ < 1^p . 2' . 50'' ....$$

si avrà, a meno di una frazione di secondo,

$$\text{corda } 1^\circ = 1^p . 2' . 50''.$$

A questo valore della corda dell' arco eguale alla 360ª parte dell' intera circonferenza corrisponde il seguente valore di π:

$$\pi = \frac{180}{120}\left(2 + \frac{5}{60} + \frac{40}{3600}\right) = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2};$$

coerentemente a questo risultato, quando Tolomeo abbisogna di un valore di π per costruire una tavola ausiliare pel calcolo delle eclissi (Cap. VII del VI Libro dell' *Almagesto*) dice: " il rapporto della circonferenza al diametro è quello di 3 . 8' . 30' a 1 "; ma nasconde la via che lo guidò a tale conclusione sotto la vaga osservazione seguente " giacchè questo rapporto cade tra 3 e $\frac{1}{7}$, e 3 e $\frac{10}{71}$ di cui si è servito Archimede " (1).

Ottenuta *corda* 1°, dalle formole di sottrazione si trae *corda* $\left(\frac{3^\circ}{2} - 1^\circ\right) = corda\,\frac{1^\circ}{2}$, mentre mediante quelle di addizione si

(1) *Almagesto ed. Halma*, T. I, p. 421.

ottiene *corda* $\left(\frac{3^\circ}{2}+\frac{1^\circ}{2}\right)$ = *corda* 2°; invocando di nuovo le formole di sottrazione, mediante il valore di *corda* **3°**, si arriva a *corda* $\left(3^\circ-\frac{1^\circ}{2}\right)$ = *corda* $\frac{2}{5^\circ}$; e continuando in modo analogo si ottengono le corde di tutti gli archi multipli di $\frac{1^\circ}{2}$.

Questo procedimento non lascia nulla a desiderare per eleganza e rigore, tanto che è quello che — *mutatis mutandis* — è tuttora adoperato. Per valutar poi l'approssimazione dei risultati ottenuti da Tolomeo, notiamo che dal valore ottenuto per *corda* 1° nel cerchio di raggio 60, scaturisce che in quello di raggio 1 è

$$\text{sen } 30' = \frac{1+\frac{2}{60}+\frac{50}{60^2}}{2\,.\,60} = 0{,}008726;$$

ora secondo un calcolo recente (1) è invece

$$\text{sen } 30' = 0{,}00873,$$

che si accorda col valore trovato da Tolomeo almeno nelle quattro prime decimali.

L'autore dell' *Almagesto* sa anche rimediare al moltiplicarsi dell'errore che si è commesso assumendo per *corda* 1.° il valore soprascritto, calcolando direttamente il valore di certe corde notevoli. Ad esempio (applicando forse due volte la formola di bisezione al valore già noto di corda 72.°) trova

$$\text{sen } 9^\circ = \frac{18+\frac{46}{60}+\frac{19}{60^2}}{2\,.\,60} = 0{,}15643,$$

che è il medesimo adottato dallo Schubert.

Va da ultimo notato che pel calcolo delle corde degli archi che non sono multipli di 30', Tolomeo ammette, servendosi di un principio tuttora in uso, che in ogni intervallo di 30' gli incrementi delle corde siano proporzionali a quelli degli archi; anzi, nella tavola

(1) Schubert, *Fünfstellige Tafeln und Gegen-Tafeln* etc. (Leipzig, 1897).

di corde che chiude il IX Cap. del I Libro dell'*Almagesto*, per ogni intervallo di 30′ è registrato, per comodità del calcolatore, il valore della trentesima parte della differenza che intercede tra le lunghezze delle corde negli estremi dell'intervallo.

43. Emerge dal fin quì detto che sin dai tempi di Tolomeo esistevano gli elementi essenziali della " teoria delle funzioni circolari „; basta applicarvi una conveniente simbolica e l'algoritmo algebrico per trasformarli in quella disciplina a cui si dà oggi quel nome. Ma ciò che invano cercherebbesi, anche in germe, nell'*Almagesto* è la trigonometria rettilinea. Per compenso, il Cap. XI del I Libro di tale opera pone, sotto il titolo di " Preliminari per le dimostrazioni sferiche „, fondamenti prettamente scientifici alla trigonometria sferica, come emerge da quanto ci apprestiamo ad esporre.

Tolomeo comincia dall'insegnare che " se si tagliano (fig. 14.ª) due rette AB, AΓ con altre due ΓΔ e BE intersecantisi nel punto Z, si avrà

$$\frac{\Gamma A}{AE} = \frac{\Gamma \Delta}{Z\Delta} \cdot \frac{ZB}{BE} \text{ »;}$$

è la relazione tanto spesso adoperata dai matematici posteriori al Rinascimento sotto il nome di *regula sex quantitatum* e che oggi è uno dei capisaldi della teoria delle trasversali, ove vien chiamata " teorema di Menelao „ (cfr. n. 34). Per dimostrarla si conduca EH parallela a ΓΔ, nasceranno così i triangoli simili AΓΔ ed AEH, che daranno

$$\frac{\Gamma A}{AE} = \frac{\Gamma \Delta}{EH}$$

ossia

$$\frac{\Gamma A}{AE} = \frac{\Gamma \Delta}{\Delta Z} \frac{\Delta Z}{EH};$$

e poichè sono simili anche i triangoli BΔZ e BHE è

$$\frac{\Delta Z}{EH} = \frac{ZB}{BE},$$

epperò sostituendo nella precedente

$$\frac{\Gamma A}{AE} = \frac{\Gamma \Delta}{\Gamma Z} \frac{ZB}{BE},$$

come erasi enunciato. — Applicando il teorema ora dimostrato al triangolo AΓΔ tagliato dalla trasversale BZE, si ottiene l'altra relazione:

$$\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{\Gamma Z}{\Delta Z} \cdot \frac{\Delta B}{BA};$$

è da notarsi che Tolomeo, il quale non concepiva il teorema di Menelao colla generalità oggi concessa dall' uso dei segni in geometria, dimostra quest' equazione direttamente, conducendo cioè AK parallela a BE, e notando che si ha successivamente:

$$\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{\Gamma Z}{ZK} = \frac{\Gamma Z}{Z\Delta}\,\frac{Z\Delta}{ZK} = \frac{\Gamma Z}{\Delta Z}\,\frac{\Delta B}{BA}.$$

Relazioni analoghe sussistono sulla sfera (1); e Tolomeo — dopo avere dimostrato quei due lemmi che vedemmo adoperati da Menelao coll' identico scopo (v. n. 34) — enuncia la principale fra esse nel modo seguente: « Siano dati (fig. 15.ª) due archi di circolo massimo di una sfera AB e AΓ; si taglino con altri due ΓΔ e BE intersecantisi in Z; si avrà:

$$\frac{\text{sen }\Gamma A}{\text{sen }AE} = \frac{\text{sen }\Gamma Z}{\text{sen }Z\Delta} \cdot \frac{\text{sen }\Delta B}{\text{sen }BA} \text{ ».}$$

Per provare l'asserto si congiunga il centro H della data sfera ai punti B, E, Z; si traccino anche le rette AΓ, AΔ, ΓΔ e si determinino le intersezioni K delle rette ΓΔ, HZ, T delle rette AΔ, BH, non chè il punto d' incontro Λ delle rette AΓ e TK. Siccome le rette HB, HE, HZ stanno in uno stesso piano e lo stesso accade per le rette AΔ, AΓ, ΓΔ, così i punti T, Λ, K in cui quelle tre rette si tagliano ordinatamente stanno sopra una medesima retta; questa è una trasversale del triangolo AΓΔ, onde, pel teorema di Menelao nel piano, si ha

$$\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda A} = \frac{\Gamma K}{K\Delta}\,\frac{\Delta T}{TA}.$$

Ma, applicando uno dei lemmi succitati, si ottiene

$$\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda A} = \frac{\text{sen }\Gamma E}{\text{sen }EA},\quad \frac{\Gamma K}{K\Delta} = \frac{\text{sen }\Gamma Z}{\text{sen }\Delta Z},\quad \frac{\Delta T}{TA} = \frac{\text{sen }\Delta B}{\text{sen }BA},$$

(1) Tolomeo non rileva esplicitamente l'analogia delle proposizioni precedenti con quelle che seguono, ma è impossibile che gli sia sfuggita; ed infatti le lettere identiche poste ai punti omologhi delle corrispondenti figure lo prova indiscutibilmente.

dunque

$$\frac{\text{sen } \Gamma E}{\text{sen } EA} = \frac{\text{sen } \Gamma Z}{\text{sen } \Delta Z} \frac{\text{sen } \Delta B}{\text{sen } BA},$$

relazione che esprime appunto il teorema di Menelao sul triangolo sferico ΑΓΔ segato dalla trasversale BZE. Tolomeo aggiunge che si ha pure (analogamente a quanto si è visto nel piano)

$$\frac{\text{sen } \Gamma A}{\text{sen } EA} = \frac{\text{sen } \Gamma \Delta}{\text{sen } \Delta Z} \frac{\text{sen } ZB}{\text{sen } BE};$$

ma questa equazione non esprime altro che il medesimo teorema applicato al triangolo sferico ΓZE tagliato dalla trasversale ΑΔΒ.

44. Come dal teorema di Tolomeo si possono dedurre tutte le formole della teoria delle funzioni circolari, così dal teorema di Menelao si possono far scaturire tutte le proposizioni della trigonometria sferica. Un trattatista moderno che avesse riconosciuto tale fatto importantissimo ne avrebbe approfittato per ottenere tutte le relazioni fondamentali che intercedono tra gli elementi di un triangolo sferico, sì da averle a propria disposizione in ogni occasione. Tolomeo invece considera costantemente la relazione generale deducendone quanto gli occorre in ogni circostanza. Che fosse in grado di farlo è dimostrato dai due Capitoli XII e XIII del I Libro dell'*Almagesto,* nei quali è esposto un procedimento per costruire le tavole che danno le *coordinate sferiche* (già note ai tempi di Ipparco e da lui adoperate) dei varî punti dell'eclittica.

Per dare un'idea della via seguita dal celebre astronomo, segnamo (fig. 16.ª) l'equatore della sfera celeste ΑΕΓ e l'eclittica ΒΕΔ, nonchè il circolo massimo della sfera stessa che contiene i poli di quello e di questa. Sia H un punto qualunque dell'eclittica e ZHTN il circolo massimo condotto per quel punto e pei poli del mondo. Applicando il teorema di Menelao al triangolo BHZ tagliato dalla trasversale AET, si ottiene:

$$\frac{\text{sen } ZA}{\text{sen } AB} = \frac{\text{sen } TZ}{\text{sen } TH} \frac{\text{sen } HE}{\text{sen } EB};$$

osservando ora che ognuno degli archi ZA, ZT, EB vale un quadrante, si può trasformare questa relazione nell'altra

$$\text{sen } TH = \text{sen } HE \text{ sen } AB.$$

In questa equazione si conosce l'arco HE (distanza sferica del punto considerato H dal punto equinoziale E) e l'arco AB (che misura l'obliquità dell'eclittica (1)), dunque essa dà il valore dell'ascensione retta TH. Va inoltre notato che quella relazione esprime che in ogni triangolo sferico

$$\text{sen cateto} = \text{sen ipotenusa} \times \text{sen ang. opposto},$$

proposizione di cui il teorema dei seni per un triangolo qualunque è un corollario immediato.

Ma considerando nella stessa figura il triangolo ATZ e la trasversale BEH si ottiene

$$\frac{\text{sen ZB}}{\text{sen BA}} = \frac{\text{sen ZH}}{\text{sen HT}} \frac{\text{sen TE}}{\text{sen EA}},$$

ossia

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \text{BA}\right)}{\text{sen BA}} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \text{HT}\right)}{\text{sen HT}} \frac{\text{sen ET}}{\text{sen}\frac{\pi}{2}},$$

o finalmente

$$\text{sen ET tg AB} = \text{tg HT}.$$

Essendosi già determinato prima l'arco HT ed essendo AB conosciuta, questa equazione dà subito il valore di ET, seconda coordinata sferica del punto H. E resta incidentalmente dimostrato che a Tolomeo era pur nota un'altra delle relazioni che legano gli elementi di un triangolo sferico, cioè la seguente:

$$\text{tg primo cateto} = \text{sen secondo cateto} \times \text{tg ang. acuto opposto al primo}.$$

Che egli sapesse altresì che " in ogni triangolo sferico rettangolo il coseno dell' ipotenusa è eguale al prodotto dei coseni dei cateti „ è dimostrato dal Cap. II del II Libro dell'*Almagesto,* ove dalla considerazione (fig. 16.ª) del triangolo EHT segato dalla trasversale ABZ si conclude essere

---

(1) Esso venne misurata da Eratostene ed applicato da Ipparco (*Almagesto ed. Halma,* T. I, p. 49).

$$\frac{\text{sen AT}}{\text{sen AE}} = \frac{\text{sen TZ}}{\text{sen ZH}} \frac{\text{sen HB}}{\text{sen BE}};$$

ora tale relazione si trasforma subito nell'altra

$$\cos \text{ET} = \frac{\cos \text{EH}}{\cos \text{TH}},$$

cioè in quella dianzi citata.

Finalmente, nel Cap. III dello stesso II Libro, una considerazione somigliante guida a concludere che

$$\text{tg cateto} = \text{tg ipotenusa} \times \text{cos ang. compreso.}$$

Altre deduzioni analoghe si trovano nell'*Almagesto* (v. p. es. il Cap. V dell'VIII Libro), ma quelle che abbiamo esposte bastano a caratterizzare i procedimenti di Tolomeo e a provare come nelle sue argomentazioni si noti quella rigorosa unità di metodo che ai dì nostri si considera obbligatoria in qualunque esposizione veramente scientifica di una teoria matematica; ragione per cui è sorprendente — ed a parer nostro anche deplorevole — che in nessun trattato moderno di trigonometria si trovi seguita la via che Tolomeo ha, se non aperta, abilmente percorsa.

Prima di abbandonare l'*Almagesto,* a complemento di quanto esponemmo nel V Cap. del nostro II L., rileveremo come nel Cap. V dell'VIII Libro di tale opera, nello studio delle culminazioni e dei tramonti delle stelle fisse sono applicati i due teoremi seguenti che Tolomeo (1) attribuisce ad Apollonio: " Nel cerchio di centro E (fig. 17.ª) si conduca un diametro ΑΓ e si segni su di esso un punto Z; presi gli archi eguali ΓΘ e ΓΗ si conducano le rette ZHB e ZΘΔ, ΔΗ e ΒΘ; queste si taglieranno in un punto K del diametro considerato tale che $AZ : Z\Gamma = AK : K\Gamma$. Se nel triangolo rettilineo ΑΒΓ, il lato ΒΓ è maggiore di ΑΓ, e si prende su ΒΓ un punto Δ tale che $\Gamma\Delta \geqq A\Gamma$, il rapporto $\Gamma\Delta : B\Delta$ risulterà superiore a quello degli angoli ΑΒΓ, ΒΓΑ ".

45. Oltre che della *Composizione matematica* Tolomeo è autore di altre opere minori le quali, quantunque non abbiano un fine

(1) *Almagesto ed. Halma*, T. II, p. 313.

prettamente teorico, pure recano, quale più qual meno, dei contributi alle nostre cognizioni sullo stato delle scienze esatte nell' antica Grecia, epperò meritano di venir quì considerate.

Cominciamo dallo scritto intitolato *Planisfero;* è posteriore all' *Almagesto,* il quale è ivi citato; ne esiste una versione latina fatta a Tolosa l' anno 1544 (1), sopra una traduzione araba dovuta ad un certo Maslem, la qual versione Commandino ha pubblicata corredandola di note e commenti (2). Lo scopo di tale lavoro è di insegnare un metodo per rappresentare sopra un piano la volta del cielo; tal metodo altro non è che la projezione fatta dal polo australe sul piano dell' equatore: in conseguenza ai punti dell' emisfero boreale corrispondono punti interni all' equatore, a quelli dell' altro emisfero punti esterni, ai meridiani corrispondono le rette di un fascio ed ai paralleli tanti cerchî concentrici. Il lettore ravviserà tosto in questa corrispondenza fra i punti di una sfera e quelli di un piano quel metodo di rappresentazione che nel 1613 doveva ricevere dall' Aguillon il nome di *projezione stereografica* (3), tuttora in uso. È risaputo che questa projezione gode di due proprietà notevolissime, cioè di far corrispondere ad un cerchio un cerchio e di conservare le grandezze degli angoli; ora questa seconda prerogativa sembra essere rimasta totalmente ignota agli antichi, mentre la prima era ad essi conosciuta, almeno in alcuni casi particolari.

La proiezione stereografica offre il più antico esempio di rappresentazione di una superficie sopra un' altra e può dirsi costituire di Tolomeo il primo capitolo della teoria matematica delle carte geografiche; spetta a Tolomeo il merito di averlo scritto? a tale domanda rispondono negativamente Proclo ed un discepolo di Ipazia — Sinesio da Cirene (4) —, i quali concordano nel fare risalire ad Ipparco il metodo esposto nel *Planisfero.*

46. Una profonda ed indiscutibile affinità con questo lavoro ha

---

(1) « Facta est translatio haec Tolosae Cal. Junii anno domini MCXLIIII », si legge infatti al termine di essa.

(2) *Ptolemaei Planisphaerium. Jordani Planisphaerium. Federici Commandini Urbinatis in Ptolemaei Planisphaerium Commentarius* (Venetiis, MDLVIII).

(3) *Opticorum,* Lib. VI (Antverp., 1613). p. 573.

(4) Synesii Cyrenaei ad Paenium *sermo de astrolabio.* Interprete Fed. Morelli (Paris, 1864), p. 1578-1588. Cfr. Delambre, *Hist, de l'astr. ancienne,* T. II (Paris 1817) p. 453.

l'altra opera di Claudio Tolomeo intitolata *Analemma*. Dell' originale ci rimangono soltanto dei frammenti nel palimpsesto *Ambros. L. 99,* che l'Heiberg ha di recente raccolti e pubblicati (1); ma ne esiste una traduzione latina, eseguita, sopra una versione araba, da Guglielmo da Moerbeck (2) e pubblicata, con commenti, da Federico Commandino (3).

L'*Analemma*, al pari delle due opere precedenti, è dedicata a un tal Ciro, ed ha per iscopo di insegnare la *projezione ortogonale* di una sfera su di un piano. Tale procedimento è considerato come un sussidio allo studio dei fenomeni celesti, e questo appunto l'autore volle indicare col titolo adottato, giacchè *analemma* ha un significato simile a quello che possiede la parola *lemma;* quello è per le costruzioni grafiche circa ciò che è questo per la dimostrazione dei teoremi. Da notarsi è la considerazione costante da parte di Tolomeo di tre cerchi fissi (il meridiano, l'orizzonte ed il primo verticale) come elementi a cui sono riferiti tutti i punti della sfera (4): come negare che esista quì in germe il concetto delle coordinate cartesiane ortogonali nello spazio?...

Una gran parte dell' *Analemma* è dedicata alla descrizione ed all' uso di certi istrumenti, mediante i quali si applica alla gnomonica il metodo della projezione ortogonale; non è il caso di riassumere quanto dice il celebre astronomo, ma va per converso notato come nelle argomentazioni esposte si è ravvisata (5) la prima radice di un procedimento uniforme, equipollente alla nostra trigonometria, che gli Indiani appresero, svolsero ed insegnarono agli Arabi, i quali lo trasmisero a Regiomontano; e questi se ne servì per ottenere alcune delle proposizioni che consideransi oggi come i capisaldi della

---

(1) *Ptolemaeus de Analemmate* (Abh. zur Gesch. der Math., T. VII, 1895, p. 1-30).

(2) Secondo il parere dell'Heiberg (*Neue Studien über Archimedes*, Id. T. V, 1890, p. 4).

(3) *Cl. Ptolemaei liber de Analemmate* (Romae, MCLXII).

(4) Forse tale considerazione fu tolta da un'altra opera di Tolomeo, oggi perduta- *Sulle dimensioni*, che Simplicio ricorda in un passo (riferito dal Commandino nell'ed. suc, citata) del commento al I Libro *De coelo* di Aristotele, opera che sembra fosse destinata a dimostrare l'impossibilità di una quarta dimensione.

(5) A. von Braunmühl, *Beiträge zur Geschichte de Trigonometrie* (Nova Acta. Abh. der k. Leop.-Carol. Deutschen Akad. des Naturf., T. LXXI, Halle 1897). V. anche la I Parte delle *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrica* (Leipzig, 1900) dello stesso, uscita durante la stampa della presente memoria.

trigonometria sferica. Basti ciò a dimostrare che l'*Analemma* è degno dell'attenzione degli storici della geometria (1).

47. Alla projezione stereografica Tolomeo fa allusione anche nel Cap. XXI della sua opera più nota, grazie alle numerose traduzioni che ebbe, cioè la *Geografia* (περὶ τῆς γεωγραφικῆς ὑφηγήσεως) (2); ma non è quello il procedimento cui Tolomeo dà ivi la preferenza. Infatti nell'VIII Libro dell'or citato lavoro egli costruisce e descrive ventisei carte geografiche, con cui intende rappresentata tutta la terra abitata, ove tanto ai meridiani, quanto ai paralleli corrispondono rette; a tale procedimento si è ispirato Mercatore nel concepire il metodo che porta il suo nome: " così è nata — osserva Jacobi (3) — la projezione conosciuta sotto il nome di Mercatore, la quale coinciderebbe con quella di Tolomeo ove questi avesse composta la sua rappresentazione della terra col mezzo di *infinite carte* ". Resta così dimostrato che le origini di tutti tre i principali metodi in uso per rappresentare la superficie della terra si trovano nella letteratura greca.

Prima di abbandonare le opere astronomiche di Tolomeo importa notare che l'esame accurato di esse ha grande interesse, oltrechè pel loro valore intrinseco, anche perchè contengono molteplici traccie dei lavori del principe degli astronomi greci, Ipparco (4), lavori di cui nessuno — eccettuato quello forse meno originale ed importante (5) — esiste tuttora. Se si riflette che ad Ipparco si attribuisce la scoperta della precessione degli equinozi, la costruzione di un Catalogo di 1022 stelle fisse (mentre uno precedente di Eratostone non ne abbracciava che 475), l'uso della longitudine e della latitudine per determinare i punti della terra, e l'applicazione delle eclissi lunari alla ricerca delle longitudini; che inoltre si ritiene che egli fosse

---

(1) Sul *Planisfero* e l'*Analemma* vedi Delambre, op. cit. T. II, p. 403-503.

(2) Anche questa è posteriore all'*Almagesto*, e venne in questo secolo pubblicata, assieme ad una traduzione francese dall' Halma (*Traité de géographie de Claude Ptolémée*, Paris 1828). Vedi Delambre op. cit. T. II, p. 520-542.

(3) *Ueber das Vorkommen eines ägyptischen Bruchnamens in Ptolemäus Geographie* (Berliner Monatsberichte, agosto 1849; oppure *Jacobi's Ges. Werke*, T. VII, 1891, p. 348).

(4) Cfr. F. Hultsch, *Winkelmessung durch die Hipparchische Dioptra* (Abh. zur Gesch. der Math., IX Heft, 1899, p. 191-209).

(5) *Hipparchi in Arati et Eudoxi Phaenomena Commentariorum*, ed. Manitius (Lipsiae 1894); ivi, p. 282-287 si trovano adunate le notizie sicure sulla vita e le opere di Ipparco. Cfr. anche Delambre, op. cit. T. I, p. 106-189.

in possesso di nozioni sul calcolo combinatorio (1); che da fonte araba ci giunge notizia di un suo scritto sopra le equazioni quadratiche (2); e che (come accennammo parlando di Tolomeo) da lui derivano le idee più originali esposte nell'*Almagesto* e nell'*Analemma,* si comprenderà come dagli antichi si ritenesse che ad Ipparco la natura avesse rivelati tutti i propri segreti, come lo si giudicasse per un genio straordinario posto al disopra della condizione di uomo e che eseguì quello che un Dio stesso avrebbe compito con fatica (3), e come sia stato scritto essere " Ipparco uno degli uomini più meravigliosi dell'antichità ed il più grande di tutti nelle scienze non puramente speculative, ma che esigono tanto cognizioni geometriche quanto nozioni di fatti speciali e di fenomeni " (4).

48. Un'altra faccia dell'operosità di Tolomeo ci rimane da descrivere; ne serbarono memoria Erone, nel suo commento ad Euclide (5), e Proclo (6), il quale al grande astronomo sembra attribuire un'opera sulla teoria delle parallele, avente per iscopo il togliere dagli *Elementi* quell'imperfezione che il d'Alembert non esitò a chiamare " l'écueil et le scandale des Éléments de la géométrie ". Proclo completa quella informazione trascrivendo nelle sue chiose alla Prop. 28 degli *Elementi* (7) il ragionamento con cui Tolomeo dimostrava che " due rette facenti con una terza angoli interni dalla stessa parte supplementari sono parallele "; tale ragionamento, e come nuova attestazione (cfr. L. II, n. 68) del desiderio di migliorare gli *Elementi* di Euclide, e come prima fiammella di quel gran fuoco che rivelò tanti lati notevoli dell'intima struttura dell'edificio geometrico, merita di venir quì riferito almeno nella sostanza (8):

---

(1) Cfr. Cantor, *Vorlesungen*, T. I (2ª ed.), p. 346.

(2) Id. Secondo il *Fihirist*, Ipparco compose « Il Libro sull'arte dell'algebra, noto sotto il nome: Le regole » ed inoltre « Il Libro sulla divisione dei numeri » (p. 22). Il primo fu commentato da Abû 'l Wafâ.

(3) Plinio, *Hist. nat.*, L. 1, 5.

(4) Delambre, op. cit. T. I, p. 186.

(5) *Codex Leidensis* 399, 1, *arabice et latine ediderunt Besthorn et Heiberg* (Hauniae, 1897) p. 119. Cfr. anche *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii* etc. ed. Curtze (Lipsiae, 1899), p. 6.

(6) Proclo-Taylor, T. II, pag. 11 e 153.

(7) Id. p. 151.

(8) Perchè venne escluso dall'opera di Stäckel-Engel, *Die Theorie de Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1897)?

Siano (fig. 18.ª) *ab*, *cd* due rette; una trasversale *egfh* le tagli in modo che la somma degli angoli *bfg* e *fgd* sia due retti. Dico che quelle due rette sono parallele, cioè non s'incontrano mai. Infatti, se ciò è possibile, *bf* e *gd* s'incontrino quando siano prolungate sino in *k*. Siccome la retta *ef* incontra la *ab* essa forma gli angoli *afe* e *bfe* eguali in somma a due retti. Similmente *fg* incontrando *cd* forma gli angoli *cgf*, *dgf* eguali a due retti. Perciò i quattro angoli *bfe*, *afe*, *cgf*, *dgf* sono eguali in totale a quattro retti; ma la somma di due fra essi *bfg*, *dgf* è due retti, dunque lo stesso avverrà della somma degli altri due *afg*, e *cgf*. Quindi se le rette *fb*, *gd* prolungate si tagliano, per essere supplementari gli angoli interni, le rette *fa*, *gc* prolungate si taglieranno pure, dal momento che anche gli angoli *afg* e *cgf* sono supplementari. Quindi le due rette *ab*, *cd* o si taglieranno da tutte due le parti della trasversale o non s'incontreranno mai. Nella prima ipotesi sia *l* la intersezione di *af* e *cg*: allora le rette *labk* e *lcdk* comprenderanno uno spazio, il che è impossibile. Per ciò non è possibile che s'incontrino due rette formanti con una terza angoli supplementari. Epperò, esse sono parallele.

Da questo brano si vede che probabilmente grave danno deriva alla scienza nostra dalla perdita del lavoro (presumibilmente giovanile) in cui Tolomeo contribuì al perfezionamento della geometria e si mostrò idoneo a coltivare anche le scienze di puro ragionamento: che tale egli fosse rispetto alle discipline fisico-matematiche è dimostrato da quanto precede e verrà confermato nel Cap. seguente.

Teone d'Alessandria ed Ipazia.

49. Fra le opere di commento che annovera la letteratura matematica dei Greci non eccelle quella (1) con cui Teone d'Alessandria (2) (L. II, n. 8) " perpetuamente sollecitato dai suoi ascoltatori (3) " si propose di " dare una spiegazione delle difficoltà che... racchiude la Composizione di Tolomeo ". Che egli abbia così reso qualche segnalato servigio " tanto a quelli che professano e studiano l'astronomia, quanto alle persone che amano abbastanza la verità per affrontare fatiche e ricerche pur di arrivare sino ad

(1) *Commentaire de Théon sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée, traduit pour la première fois du grec en français par M. l'abbé Halma* (Paris, 1821). Questa ottima edizione, di cui ci serviamo, viene da noi citata colla abbreviatura *Teone ed. Halma*.

(2) Che bisogna ben guardarsi dall'identificare con Teone Smirneo, come fa Montucla (*Hist. des Math.*, T. I, p. 292-293).

(3) Il virgolato è tolto dalla lettera-prefazione diretta da Teone a suo figlio Epifanio, personaggio del resto ignoto, forse perchè, come crede il Montucla (*Histoire des mathématiques*, T. I, p. 322) « la célébrité de la soeur (Ipazia) a eclipsé le frère ».

essa „ è forse vero, sì minuziose e diffuse essendo le sue illustrazioni. Che poi egli abbia " aggiunte alcune dimostrazioni ignote ai commentatori precedenti „ i quali " proponendosi di omettere le più chiare, hanno più spesso soppresse le più difficili „ è un'asserzione che non siamo in grado nè di dimostrar vera nè di confutare non essendo noi in possesso dei lavori a cui allude Teone. Anzi, nemmeno il commento da lui redatto è giunto integralmente sino a noi, chè ne sopravissero soltanto i primi tre libri.

Siccome quanto ci rimane del commento di Teone si riferisce ai libri dell'*Almagesto* in cui sono esposti i fondamenti posti dai Greci all'astronomia, così poteva sperarsi che — analogamente a quanto si è potuto fare per la geometria coll'ajuto del commento di Proclo — esso abilitasse a ricostruire la storia della sferica e della trigonometria. Ma una semplice lettura dell'opera di Teone mostra fallace tale speranza; vero è che il commentatore è in citazioni meno parco del suo autore, ma è ancora troppo avaro, sia che lo si paragoni ai chiosatori coevi di cui dovremo occuparci nel Libro veniente, sia che si tenga conto del bisogno in cui ci troviamo di informazioni. Le notizie più abbondanti e veramente utili che egli ci somministra concernono l'aritmetica pratica (logistica) dei Greci, e verranno da noi sfruttate nell'ultimo Libro di quest'opera. Sembra anzi che i calcoli aritmetici fossero il campo che Teone si sentiva di meglio dominare; valga a dimostrarlo la illustrazione che egli porge del Cap. (terzo del I Libro) dell'*Almagesto* avente come titolo e tesi " la terra è sensibilmente di forma sferica „; per dimostrar ciò era sufficiente paragonare il diametro della terra all'altezza della più alta montagna conosciuta; invece Teone scrive (1):

La grandezza totale della sfera misurata sopra il suo circolo massimo è diciotto miriadi di stadj, come dice Tolomeo nella sua *Geografia*. Ora Archimede mediante la rettificazione dimostra che la circonferenza del circolo è maggiore del triplo del diametro assieme alla settima parte dello stesso. Quindi il diametro della terra sarebbe 572727 stadj. Infatti la circonferenza di diciotto miriadi è maggiore del triplo e del settimo di questa quantità. Ma Eratostene prova mediante le diottre che servono a misurare da lontano, che la perpendicolare calata dal vertice delle montagne più alte sulla loro base è dieci stadj. E siccome Archimede dimostrò eziandio che il rettangolo del diametro per la circonferenza rettificata è il quadruplo dell'area del circolo, così il prodotto del diametro per la quarta parte della circon-

(1) *Teone ed. Halma*, T. I, p. 62-64.

ferenza eguaglia l'area del circolo. Si trova in conseguenza che il quadrato del diametro sta all'area del circolo come 14 a 11. Infatti la circonferenza essendo più grande del triplo e di un settimo del diametro, supposto questo di sette parti, la circonferenza ne conterrà 22 ed il suo quarto $5 \frac{1}{2}$. Quindi il quadrato del diametro ne conterrà 49 ed il cerchio $38 \frac{1}{2}$. Raddoppiando questi numeri, in causa della frazione $\frac{1}{2}$, avremo come superficie del circolo 77 delle parti di cui 98 contiene il quadrato del diametro. Orbene il rapporto di questi numeri ridotto all'espressione più semplice è lo stesso di quello fra 11 e 14. Infatti il loro massimo comune divisore è 7, che, dividendo 77, dà per quoziente 11, e, dividendo 98, dà per quoziente 14. Ma, come dimostreremo più innanzi, il cubo stando al cilindro di eguale altezza nel rapporto quadrato del diametro al circolo, quel cubo sta a quel cilindro nel rapporto di 14 a 11. Archimede, nel suo trattato della sfera e del cilindro, ha dimostrato che se un cilindro ha la stessa altezza ed ha per base un circolo massimo di essa, la sfera è due terzi del cilindro. Dunque se il cilindro è 11 la sfera sarà $7 \frac{1}{3}$. Essa sarà dunque $\frac{7}{14}$ e $\frac{1}{3}$ di una delle quattordicesime parti del cubo. E siccome dimostrammo che il diametro della terra è 57273, il quadrato del diametro è 3280196529, ed il cubo 187866695805417, la cui quattordicesima parte è 13419049700386. Questo numero preso sette volte dà 93933347902702. Aggiungo ad essa il terzo della quattordicesima parte che è 4473016566795. La somma è 98406364469497. Tale è la grandezza della terra. Ma la perpendicolare abbassata dalla più alta montagna è 10 stadj. Dunque se noi concepiamo che sulla terra, così prodigiosamente grande, si faccia un'elevazione di 10 stadj, vedremo bene che non sarà tolta alla sfera la forma sensibilmente sferica.

Al lettore non isfuggirà che Teone, non soltanto esegue quì dei calcoli in gran parte inutili, ma commette l'errore di paragonare fra di loro due grandezze eterogenee, come sono un volume ed una altezza.

50. Sopra un soggetto prettamente matematico si aggirano il brano (1) del commento di Teone destinato a chiarire un rapido cenno fatto da Tolomeo sulla teoria degli isoperimetri (2), e quello in cui, a proposito del teorema di Menelao, egli espone delle lunghe considerazioni intorno alla composizione dei rapporti (3); come vedremo parlando di Eutocio (L. IV, n. 31-34) è questo un tema che esercitava sui commentatori un fascino speciale! Teone giudica poi necessario di esporre (4) una dimostrazione *ad hoc* del teorema di

---

(1) *Teone ed. Halma*, T. I, p. 33-49. Ivi è in sostanza riprodotto lo scritto di Zenodoro che noi conosciamo (L. II, n. 75).

(2) *Almagesto ed. Halma*, T. I, p. 10.

(3) *Teone ed. Halma*, T. I, p. 235.

(4) Id. p. 187.

Tolomeo per il caso in cui (fig. 9.ª) la diagonale BΔ (v. n. 40) sia bisettrice dell'angolo ΑΒΓ; a rigore poteva dispensarsene perchè, eccettuato il caso in cui il quadrilatero considerato sia regolare (nella quale ipotesi il teorema di Tolomeo è evidente), una almeno delle diagonali di un quadrilatero non biseca alcuno degli angoli di questo aventi per vertici gli estremi di essa. Di qualche interesse sono invece le osservazioni (1) che illustrano il *metodo di interpolazione* (v. n. 42, in fine) usato da Tolomeo per rendere applicabili le sue tavole di corde agli archi che non sono multipli di 30'; Teone dà molti particolari relativi ed esempî opportuni.

Ciò è forse tutto quanto di importante pel matematico puro si legge nel *Commento* di cui ci occupiamo. L'autore — che già conosciamo come editore ed illustratore degli *Elementi* di Euclide (L. II, n. 8) ed il cui nome troveremo (n. 52) collegato all'*Ottica* dello stesso autore — visse in Alessandria sotto il regno dell'imperatore Teodosio (379-395 dell'E. v.), cioè nella seconda metà del IV Sec. dell'E. v., perchè assistè nel 365 ad un'eclisse e proseguì le sue osservazioni astronomiche sino al 372; inoltre egli fu padre di una donna che fu giudicata degna di stare alla testa della scuola platonica di Alessandria, la celebre e sventurata Ipazia (2), il cui sangue macchiò le vie di Alessandria nel marzo del 415, e le cui opere matematiche — che Suida ricorda imperfettamente (3) —

---

(1) *Teone ed. Halma*, T. I, p. 214.

(2) Ὑπατία; meno frequente e attendibile è la lettura Ὑπάτεια (Hoche, *Hypathia die Tochter Theons*, Philologus, T. XV, 1860, 435-474); ivi si legge: « Nell'ultimo periodo della lotta fra la Chiesa cristiana e la fede negli antichi Dei, ci si presenta il fenomeno di una donna, la cui eguale si cerca indarno in tutta la storia, che, uscita dal Museo, seppe raccogliere quasi tutta la scienza pagana, almeno nelle discipline mediche e filosofiche, e colla potenza del suo aspetto e della sua parola divenne o minacciò divenire così terribile pel Cristianesimo e pei suoi aderenti in Alessandria, che la Chiesa bellicosa scatenò contro di essa una morte ignominiosa ».

(3) Dall'imprecisione delle espressioni usate da Suida deriva che, mentre il Nesselmann (*Die Algebra des Griechen*, Berlin 1842, p. 248) afferma che le opere di Ipazia sono un *Commento* ad Apollonio ed uno alle *Tavole astronomiche* di Diofanto, altri (cfr. Cantor, *Vorlesungen*, 2ᵉ Aufl., T. I, 1894, p. 462) attribuisce ad essa delle chiose a Diofanto, una *Tavola astronomica* ed un *Commento ad Apollonio*. Nè va taciuto che le parole di Suida autorizzano a dubitare che il Diofanto ivi nominato sia il celebre aritmetico di cui tratteremo nel V Libro (v. la pref. dello Schulz, p. VII alla sua versione tedesca di Diofanto, stampata a Berlino nel 1822).

ebbero una sorte non meno deplorevole di quella che toccò alla misera autrice (1).

Con Teone ed Ipazia non soltanto si chiude la serie dei Greci che coltivarono l'astronomia, ma finisce anche quella di coloro che, a partire dalla morte di Alessandro Magno, diedero alla città da questo fondata la meritata fama di eminente sede di studî scientifici; della " divina scuola di Alessandria „ (secondo l'entusiastica espressione di Sinesio) si celebrano ora i funerali.

IV.

Gli albori della Fisica matematica.

L'Ottica in Euclide.

51. I Greci, mentre tramandarono ai posteri un grandioso edificio geometrico che validamente resiste ai colpi del piccone demolitore di cui è armata la critica moderna, non ci lasciarono in eredità che degli informi frammenti di una fisica infantile che invano chiederebbero un posto nella scienza attuale (2): come infatti si potrebbero introdurre (seguendo Platone) in un organismo scientifico delle teorie *a priori* a cui non corrisponde la generalità dei fenomeni, oppure (prendendo a modello Aristotele) una congerie di fatti non connessi fra di loro da un'attendibile spiegazione comune?

Alla sorte generale si sottrassero, per merito di Archimede, una parte della statica (L. II, n. 34) e, come vedremo tra breve, (v. n. 60; cfr. L. II, n. 37) l'idrostatica, ma vi soggiacque invece la teoria della luce; per persuadersene il lettore non ha di meglio che esaminare i passi relativi del " maestro di color che sanno (3) „.

---

(1) Maggiori particolari sulla vita di Ipazia si troveranno nel precitato articolo di R. Hoche, e nella memoria del Bigoni, *Ipazia Alessandrina, studio storico* (Atti del R. Ist. Veneto, VI Serie, T. V, 1887).

(2) « .... non possiamo citare alcuna dottrina fisica oggi ammessa, di cui esista un'antecipazione, analoga a quella che, del sistema Copernicano, troviamo in Aristarco .... (Wehwell, *History of inductive Sciences*, T. I, London 1837, p. 68).

(3) Si trovano raccolti nell'opuscolo di E. Wilde, *Ueber die Optik der Griechen* (Berlin 1832), p. 5-8.

Tuttavia l'ottica contiene una parte importante la quale si fonda, in ultima analisi, sull'unico fatto dell'essere i raggi luminosi rettilinei; per la natura geometrica che essa possiede *doveva* interessare gli antichi Greci, e, per essere indipendente da qualunque altra ipotesi sulle norme regolatrici dei fenomeni, *poteva* venire studiata almeno ne'suoi fondamenti. Ed infatti la teoria fisico-matematica che in questo secolo fu tanto efficacemente promossa da Malus e Dupin, da Hamilton e Kummer, trovò sotto il cielo dell'Ellade assidui cultori. Chi fosse il primo non sappiamo (1); le radici dell'ottica geometrica sono sconosciute al pari di quelle di quasi tutti i rami della scienza, per essa come per questi non possiamo che segnalare i primi documenti scritti che vi si riferiscono.

Ora nella letteratura greca esistono due scritti sulla teoria della luce, dei quali taluno fece autore Euclide; tale attribuzione venne contestata da altri, i quali non trovarono in essi le doti di chiarezza e rigore che si considerano come caratteristiche dello stile del sommo Alessandrino e vi incontrarono errori non lievi negli enunciati e nelle dimostrazioni. Fra coloro che opinarono illegittimo il fare Euclide autore di quelle due opere sta il Peyrard, il quale, in conseguenza, le escluse dalla sua celebre edizione (v. L. II, n. 8). Oggi invece almeno riguardo a una di esse, si inclina generalmente verso l'avviso' opposto, osservando che le imperfezioni di forma (molte delle quali, come vedremo nel n.° seg., non van poste a carico di Euclide) non bastano a far decretare indegna dell'autore degli *Elementi* un'esposizione matematica dei fenomeni di propagazione della luce, un primo tentativo di sottoporre a leggi determinate i movimenti di un ente, come è la luce, tanto differente dagli altri conosciuti; nè va dimenticato che Euclide è di assai poco posteriore ad Aristotele, nelle cui opere non s'incontrano, sull'argomento che ora ci interessa, se non ipotesi insostenibili e nemmeno svolte. Per ciò consideriamo, sino a prova contraria, come di Euclide, l'*Ottica* che ne porta il nome.

52. L'*Ottica* venne pubblicata per la prima volta nel 1557 da Giovanni Pena nell'originale (2) ed in una traduzione latina (3):

---

(1) Il Wilde (op. cit. p. 32) ricorda che Ipparco attribuisce ad Eudosso un lavoro di ottica.

(2) *Euclidis Optice et Catoptrice nunquam antehac edita* (Parisiis, 1557).

(3) *Euclidis Optice et Catoptrice e Greco versa* per J. Penam (Parisiis, 1557).

edizione e traduzione che passarono, senza subire quasi alterazione alcuna, nella collezione delle opere complete di Euclide pubblicata nel 1703 da D. Gregory (1). Col testo ivi adottato concorda, almeno nella sostanza, la generalità dei manoscritti esistenti; ma nel 1879 l'Heiberg scoperse a Firenze — nel *Cod. Laurent.* XXVIII, 3 — un'altra redazione, che si ritrova poi nel *Cod. Vindobonensis 103* ed è migliore della vulgata (2); le proposizioni, fatta eccezione per poche, sono le stesse ed espresse con le medesime parole, ma le dimostrazioni sono meno concise, più esatte, e presentano, nella forma, molta assomiglianza con quelle degli *Elementi:* cade così uno degli argomenti più validi fra quelli addotti per negare ad Euclide la paternità dell' *Ottica* e nasce la convinzione che nel citato *Cod. Vindobonensis 103* si trovi la redazione originaria di essa. E tale convinzione acquista maggiore forza e determinatezza osservando che i mss. della vulgata contengono un esordio che non può essere di Euclide, giacchè ivi se ne parla in terza persona; è una specie di prolusione che spiega, mediante le idee di Platone, i fenomeni dell'ottica e della visione. E poichè il *Cod. Paris 2468* l'attribuisce a Teone, sembra ragionevole la conclusione (3) che questi fu, non soltanto editore degli *Elementi* (v. L. II, n. 8), ma anche autore della redazione più diffusa dell' *Ottica* di Euclide.

In base a tali conseguenze l'Heiberg nel VII Vol. (Lipsia 1895) della sua ottima edizione di Euclide inserì, oltre una *Euclidis Optica,* un'*Opticorum recensio Theonis:* la prima corrisponde ai codici di Firenze e Vienna succitati, la seconda è la vulgata (4); il contenuto di entrambe è circa il medesimo, onde nell'analisi che or ne imprendiamo è superfluo considerarle a parte: basti dichiarare che la indicazione dei (cinquantotto) teoremi è fatta da noi in base alla numerazione adottata nella surriferita *Euclidis Optica* (5).

---

(1) Sulla traduzione latina del Pena fu eseguita quella francese che leggesi in Poudra, *Histoire de la perspective ancienne et moderne* (Paris, 1864), p. 5-15.

(2) Venne pubblicata per la prima volta dall'Heiberg nelle sue *Litterargeschichtliche Studien über Euklid* (Leipzig, 1882), p. 93-131.

(3) Heiberg, op. cit. p. 139.

(4) V. ad es.: *La prospettiva di Euclide insieme alla prospettiva di Eliodoro, tradotta da Egnatio Danti* (Firenze, 1573).

(5) Secondo P. Tannery (*Pour l'histoire de la Science hellène,* Paris 1887, p. 277) questo lavoro di Euclide avrebbe avuto come prototipo uno scritto oggi perduto di Anassagora.

53. Da buon sistematico Euclide comincia dall'enunciare le proposizioni indimostrate (῞Οροι) su cui si fonda; sono le seguenti:

I raggi che partono dall'occhio sono rettilinei. La figura formata dai raggi luminosi è un cono avente per vertice l'occhio e per base il contorno dell'oggetto guardato. Sono visibili soltanto gli oggetti a cui giungono raggi visuali, invisibili gli altri; sembrano maggiori gli oggetti visti sotto angoli più grandi, minori quelli che sono visti sotto angoli più piccoli, eguali quelli che sono visti sotto angoli eguali; sembrano più alti quelli che corrispondono a raggi più elevati, più bassi quelli che corrispondono a raggi inferiori, più a destra quelli che corrispondono a raggi a destra, ed a sinistra quelli che corrispondono a raggi a sinistra. Appajono più distinte le cose viste sotto parecchi angoli.

Di queste proposizioni la più importante, quella che merita veramente il nome di fondamentale, è la prima; essa prova che Euclide, come tutti i seguaci di Platone (1), ammetteva la visione accadere in causa di raggi uscenti dall'occhio, ipotesi notoriamente erronea, ma che conduce alle stesse conseguenze geometriche di quella veritiera, perchè l'una e l'altra rappresentano nella teoria della luce una parte secondaria: l'essenziale è che si ammetta e si applichi *la rettilineità dei raggi visuali*. Quali esperienze conducano a confermare quell'ipotesi è esposto nell'interessante proemio della *Opticorum recensio Theonis;* nel quale è poi illustrata un'altra ed assai più strana proposizione assiomatica adoperata da Euclide, quella cioè che i raggi visuali non si succedono con continuità; il movente ad ammettere tal principio è l'osservazione che noi non vediamo certi oggetti a noi vicini (così talvolta cerchiamo indarno un oggetto piccolo caduto ai nostri piedi, tal altra non arriviamo a percepire nello stesso tempo tutte le lettere di un libro aperto davanti a noi), il che, secondo Euclide, non si spiega che ammettendo delle discontinuità nel cono formato dai raggi visuali. Nei fenomeni ora nominati Euclide trovò anche argomenti a sostegno della supposizione da lui fatta che le origini dei raggi visuali si trovassero nell'occhio, invece che negli oggetti illuminati. Da tale ipotesi inverosimile derivano alcune proposizioni, di evidente falsità, contenute nell'*Ottica* di cui ci occupiamo; in tali condizioni si trovano la I, che nega la possibilità di percepire nello stesso momento tutto un oggetto, e la IX, secondo cui un quadrato ha da lungi l'apparenza di un circolo (perchè i suoi angoli sembrano smussati).

(1) Cfr. Th. H. Martin, *Études sur le Timée de Platon*, T. II (Paris, 1841), p. 157-163.

54. Prescindendo da queste proposizioni, che sono conseguenze logiche di premesse false, le altre costituenti l' *Ottica* di Euclide sono giuste, tanto che vengono ancora considerate siccome ingredienti necessari di qualunque trattato di prospettiva, e venivano forse insegnate agli studenti di astronomia per premunirli contro i paradossi degli Epicurei, i quali sostenevano essere impossibile di provare che il sole è più grande di quanto ci appare (1). Ed invero la distinzione fra *grandezza apparente* e *grandezza reale* di un oggetto, che in tante occasioni è invocata (2), balza fuori dalle Proposizioni II, IV e V, le quali insegnano come la prima varî al moversi dell' oggetto; anzi Euclide sa anche (Prop. VIII) che le grandezze apparenti di un oggetto non sono proporzionali alle rispettive distanze di questo dall' occhio (3). La stessa distinzione guida (nella Prop. VI) a spiegare perchè due rette parallele sembrino concorrenti. Infatti nella pratica due rette si giudicano parallele quando e solo quando appajono equidistanti; onde, date due rette, per verificare se sono parallele, si conducono tanti segmenti fra loro paralleli aventi i loro estremi su di esse; ove essi risultino eguali, e soltanto allora, quelle due rette saranno parallele. Orbene, se queste effettivamente lo sono, quei segmenti hanno la stessa grandezza effettiva, ma hanno grandezze apparenti che decrescono colla distanza, epperò vengono da noi giudicati come formanti una serie indefinitamente decrescente. Donde scaturisce la proposizione fondamentale della prospettiva, quella cioè che dice " due rette parallele sembrano concorrenti ".

Nell' *Ottica* di Euclide vanno ancora notati tre problemi interessanti la pratica e risoluti mediante la teoria della similitudine; sono: la determinazione d' un' altezza inaccessibile, della profondità di un pozzo e della lunghezza di una data retta; del primo anzi Euclide insegna due soluzioni, una nell' ipotesi che il sole sia visibile sull' orizzonte, l' altra mediante uno specchio, applicando la legge fondamentale del fenomeno della riflessione della luce. In seguito, il nostro autore passa ad esaminare ciò che accade quando si contempla, non più una retta, ma un solido di forma conosciuta.

---

(1) P. Tannery, *Recherches sur l' histoire de l' astronomie ancienne* (Paris, 1893), p. 36.

(2) V. ad es. *Teone ed. Halma*, T. I, p. 24.

(3) In linguaggio trigonometrico ciò si esprime dicendo che « un angolo non è proporzionale alla sua tangente trigonometrica ».

Comincia dal caso in cui la visione si faccia con un solo occhio, per passare poi a quello in cui vengano adoperati entrambi. Supposto il solido di forma sferica, nel primo caso la parte vista è minore di un emisfero, sembra contornata da un circolo (Prop. XXIII) e tanto minore di un emisfero quanto più l'occhio è vicino al solido (Prop. XXIV), quantunque sembri accadere il contrario, perchè del cono visuale cresce l'apertura all'avvicinarsi dell'occhio. Nel secondo caso invece la parte vista è eguale, maggiore o minore di un emisfero secondochè la distanza fra i due occhi è eguale, maggiore o minore del diametro della sfera (Prop.[i] XXV-XXVII). Ai due teoremi riferiti, concernenti la sfera vista con un solo occhio ne corrispondono altri nel cilindro (Prop.[i] XXVIII-XXIX) e nel cono (Prop.[i] XXX-XXXI), i quali hanno analogia con quello che Aristarco (cfr. n. 21) dimostrò ed enunciò nei seguenti termini: " Se una sfera è illuminata da una sfera maggiore, la parte illuminata supera un emisfero „ (1).

55. Nella stessa opera è successivamente studiata la questione di determinare quale aspetto abbia un circolo guardato con un solo occhio, ed è dimostrato che esso conserva la forma circolare quando l'occhio si trovi sulla perpendicolare innalzata dal centro del circolo al suo piano oppure ad una distanza dal centro eguale al raggio (Prop.[i] XXXIV-XXXV); Pappo, il quale nel VI Libro della *Collezione* dimostrò diversamente queste proprietà, le ha completate coll'investigare la forma apparente che ha il cerchio quando l'occhio non occupa queste posizioni speciali. Ma di ciò parleremo a miglior tempo (L. IV, n. 11); quì invece va notato che Euclide si occupa eziandio dell'aspetto che hanno le ruote di un carro (Prop. XXXVI), e stabilisce pel quadrato (analogamente farebbesi per qualsia altro poligono regolare) le posizioni dell'occhio affinchè la sua forma apparente sia regolare. Dopo di che il nostro autore ritorna a paragonare le varie grandezze apparenti di uno stesso segmento rettilineo ed osserva che se per una data posizione dell'occhio e per gli estremi

(1) Prop. III dell'opuscolo analizzato nei nn. 19-20; l'autore se ne servì per concludere che: « Nella luna il minimo circolo di separazione della luce dall'ombra si ha quando il vertice del cono circoscritto si trova nell'occhio dell'osservatore » (Prop. IV) e che « Nella luna il circolo che separa la parte luminosa dall'oscura non differisce sensibilmente da un circolo massimo » (Prop. V).

del segmento si fa passare una circonferenza, questa godrà due notevoli proprietà; cioè, guardato da tutti i punti di essa, il detto segmento avrà la stessa grandezza apparente, e tutte le corde del corrispondente cerchio eguali a tale segmento, guardate dall' occhio nella posizione data, avranno la medesima grandezza apparente (Prop. XXXVII e seg.). Si connette a tali considerazioni la ricerca (Prop. XLVIII) dei punti da cui un dato segmento è visto sotto angoli aventi un rapporto assegnato.

Quì ci arrestiamo, giacchè il fin qui detto è sufficiente a porgere un' idea adeguata dell' *Ottica* recante il nome di Euclide e a dimostrare che quantunque per la precisione del dettato e l' ordinamento della materia sia inferiore agli *Elementi,* pure non è così imperfetta da offuscare l' aureola di purissima gloria che circonda l' autore di questi, tanto più che, mentre Euclide geometra ha notoriamente una coorte di precursori, alcuni dei quali valorosissimi — valga per tutti Eudosso da Cnido —, nulla abilita ad affermare che altrettanti ed altrettali ne abbia avuti nelle sue investigazioni intorno a la propagazione della luce ed i fenomeni conseguenti.

Il più antico lavoro di Catottrica.

56. Quella parte dell' ottica geometrica che concerne la riflessione della luce chiamasi *catottrica,* mentre si dà oggi il nome di *diottrica* a quella che alla rifrazione si riferisce (1). Che ai Greci non siano rimaste ignote le applicazioni pratiche di cui quella è suscettibile vien dimostrato dalla storia (qualunque ne sia del resto il grado di attendibilità) (2) dei mezzi di offesa e difesa adoperati da Ar-

(1) Questo significato della parola « diottrica » è di origine moderna (Descartes?); i Greci invece designavano sotto questo nome la teoria della *diottra* (v. più avanti, n. 65); anzi Plutarco (*Non posse suaviter vivi secundum Epicurum*, c. XI) attribuisce ad Euclide una Διοπτρικά; inoltre, tema somigliante, aveva uno scritto di Bitone, ricordato in un trattato sulle macchine belliche anteriore a quello di Erone e diretto al re Attalo (cfr. Thevenot, *Mathematici Veteres*, p. 108), del quale è parola in un lavoro del geodeta bizantino Erone il Giovane (v. Th. H. Martin, *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie*, Mem. pres. par divers Savants à l' Acad. des Inscript. et Belles-Lettres, T. IV, 1854, p. 258).

(2) Wilde (op. cit. p. 25-32) ha raccolte e discusse le notizie relative; cfr. anche i cap. XXVIII-XXXI de *Lo specchio ustorio* (Bologna, 1632) di Bonaventura Cavalieri e l' articolo del Peyrard intitolato *Miroir ardent* posto al termine delle *Oeuvres d'Archimède traduites littéralement* (II ed., Paris, 1808).

chimede durante l'assedio della sua patria (v. L. II, n. 32). Che poi essi abbiano anche investigate le leggi fondamentali di quel ramo della fisica è dimostrato da un opuscolo il quale godette di notevole celebrità e, sotto il nome di Euclide, ebbe varie edizioni (1), il quale però — almeno nello stato in cui trovasi nei manoscritti esistenti — non merita di venire annoverato tra gli scritti autentici del grande alessandrino. Invero esso ha tutto l'aspetto di una compilazione assai posteriore ad Euclide, fatta forse da Teone d'Alessandria (2), servendosi di lavori più antichi; questi appartenevano probabilmente ad Archimede, dal momento che Teone, nel suo *Commento all'Almagesto,* cita una *Catottrica* del famoso Siracusano (3), ed Apulejo afferma essere dubbio se Archimede sia più grande pei suoi lavori di geometria o per quelli di catottrica (4). Benchè, dunque, la così detta *Catottrica di Euclide,* non possa ascriversi fra i lavori genuini di alcun matematico conosciuto, pure non merita di venir passata in silenzio nella rassegna che andiamo facendo delle produzioni fisico-matematiche dei Greci, se non altro per esser dessa la prima attestazione di uno studio razionale dei fenomeni di riflessione della luce sopra specchi piani o sferici (5).

Fra i principî fondamentali applicati nell'opuscolo di cui parliamo ritroviamo quelli, a noi già noti (v. n. 53), che affermano essere rettilinei i raggi luminosi ed esserne l'occhio l'origine. Va poi notata la forma sotto cui vien presentata la legge governatrice dei fenomeni della riflessione; invece di ammettere come postulato l'eguaglianza fra l'angolo d'incidenza e quello di riflessione, lo scrittore della *Catottrica* afferma che, nella riflessione sopra uno specchio piano, il rapporto fra le distanze dallo specchio dell'oggetto e dell'occhio dell'osservatore è eguale al rapporto delle lunghezze dei raggi incidente e riflesso. Da tale proposizione si trae, con una

---

(1) Si trova nelle edizioni di Euclide dovute a Heiberg e Gregory; inoltre nell'opera del Danti citata nel n. 52, sotto il titolo *Gli specchi di Euclide; cioè quella parte della Prospettiva, che dimostra i varî effetti degli specchi.*

(2) Heiberg, *Euclidis opera omnia,* T. VIII, p. L.

(3) *Teone ed. Halma,* T. I, p. 27, ove dalle ricerche di Archimede è dedotta una spiegazione del fatto che gli astri appaion più grandi all'alba che all'apogeo.

(4) *Apologia* (ed. Julianus Floridus, Paris, 1688) p. 428.

(5) Riguardo a questa parte dell'ottica greca, vedasi Th. H. Martin, *Études sur le Timée de Platon,* T. II (Paris 1841), p. 163-171.

semplice considerazione di triangoli simili, la eguaglianza dei due angoli suddetti, supposto che la riflessione avvenga sopra specchi piani o sferici (concavi o convessi); e quindi si deduce quale sia la natura dell'immagine di un oggetto conosciuto sopra uno specchio di assegnata struttura. Non riferiremo le proposizioni relative e nemmeno segnaleremo le inesattezze negli enunciati e gli errori nelle dimostrazioni, chè la nostra critica cadrebbe nel vuoto non essendo noto il bersaglio contro cui dirigerla; soltanto, finendo, rileveremo l'ultima proposizione, la quale afferma la possibilità di incendiare un oggetto coll'ajuto di uno specchio esposto al sole; la rileviamo perchè rappresenta il punto di contatto tra le considerazioni teoriche contenute nella *Catottrica* del Pseudo-Euclide e gli apparati guerreschi attribuiti ad Archimede.

Eliodoro o Damiano? Tolomeo od Erone?

57. Alcune delle cose che si leggono nell'*Ottica* di Euclide si trovano esposte in parte ed in parte confutate in un operetta, di cui alcuni frammenti si leggono in calce alla *Prospettiva* di Euclide edita dal Danti (cfr. n. 52), e che porta il titolo: Ἡλιοδώρου Λαρισσαίου (1) Κεφάλαια τῶν Ὀπτικῶν. È l'ultimo documento conosciuto su l'ottica, o per dir meglio, la prospettiva dei Greci; l'autore di esso non è noto con precisione: secondo il Danti sarebbe Eliodoro da Larissa, mentre secondo il Martin (2), sarebbe Damiano discepolo di Eliodoro; egli però è posteriore, non soltanto ad Euclide, non soltanto a Tiberio (42 a. C. 37 E. v.) — del quale ricorda la facoltà di vedere di notte come i gatti —, ma anche ad Erone di Alessandria (v. Cap. seg.), di cui rammenta la *Catottrica,* e a Claudio Tolomeo, di cui cita l'*Ottica*. Fra ciò che si legge in questi frammenti spicca un teorema di minimo, cioè quello affermante che la luce percorre, durante la riflessione, il più breve possibile cammino. Esso viene attribuito ad Erone; infatti si legge nella precitata edizione del Danti: « Essendo che ha dimostrato il Meccanico Herone, nel libro degli specchi, che

(1) Il ms. 165 della Biblioteca di Monaco porta invece Κρισσαίου (v. Th. H. Martin, *Recherches sur la vie* etc. p. 198. nota).

(2) *Recherches* citate p. 54-55. Ivi p. 413-420 si trova una buona restituzione dell'opera in discorso, accompagnata da una traduzione francese.

quelle rettilinee, che ad angoli eguali si rompono, sono minori di tutte le altre, che dalle medesime simili parti vengono, e si rompono alle parti medesime ad angoli ineguali „. Per avere serbato notizia di tale importante osservazione e per la estimazione di cui fu fatto segno nei secoli passati (1), lo scritterello di Eliodoro o Damiano merita la menzione che quì ne facemmo.

58. Del resto, questo nuovo punto di vista per considerare il fenomeno della riflessione si ritrova in un altro lavoretto, in quello cioè intitolato *Ptolemaeus de Speculis,* e che fa parte di una collezione di opere sulla sferica pubblicata da G. Nucerello a Venezia il 19 Gennajo 1518 (e contrafatta nello stesso luogo il 30 Giugno del medesimo anno) sotto il titolo *Sphaera mundi noviter recognita* (2). È desso una traduzione dal greco (3), compiuta l'ultimo giorno dell'anno 1269, probabilmente da Guglielmo de Moerbecke (4). Ora sin dal principio di questo secolo G. B. Venturi ne' suoi pregiati e pregevolissimi *Commentari sopra la storia e la teoria dell'ottica* (Bologna, 1814) avvertì che il paragone del libro *de Speculis* coll'*Ottica* di costui (v. n. 59) prova essere falsa l'attribuzione di quello al celebre astronomo e fa nascere la convinzione che esso sia l'estratto di un'opera, in origine anonima, e poi arbitrariamente attribuita a Tolomeo. Considerando poi: 1.° che nella prefazione di quel libro è citato un lavoro sulla *Diottra*, 2.° che è noto (v. n. 65) uno scritto di Erone Alessandrino sopra questo tema, 3.° che nel testo si legge quel teorema di minimo attribuito ad Erone (v. n. prec.) e non esistente altrove, 4.° che lo scopo pratico del libro *de Speculis* fa apparire questo di natura analoga a quella di molte fra le opere di Erone, il Venturi si credette autorizzato a concludere (op. cit., p. 52) che l'opera *Sugli specchî* attribuita a Tolomeo e spesso (benchè vagamente) ricordata da scrittori dei secoli XVI e XVII,

---

(1) È dimostrata dalle numerose edizioni e traduzioni che ebbe e che il Martin ha registrate (op. cit., p. 54, nota).

(2) Cfr. Boncompagni, *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino, traduttore del secolo duodecimo* (Roma, 1851).

(3) Lo si deduce dal grande numero di ellenismi e di parole greche latinizzate, nonchè dal fatto che l'ordine in cui si seguono le lettere adoperate per indicare i vari punti delle figure è lo stesso che tengono le lettere corrispondenti dell'alfabeto greco.

(4) Martin, *Recherches* citate, p. 63.

appartiene invece nella sostanza ad Erone d'Alessandria. Tale attribuzione che il Martin suffragò di nuove prove (1) ci sembra raggiungere un grado di probabilità che confina con la certezza; e poichè le basi di tale conclusione stanno appunto nel proemio di quel lavoro, non è inutile nè in opportuno il riferirne quì la parte essenziale:

Prima di noi varî autori scrissero intorno all'Ottica in modo soddisfacente, in ispecie Aristotele. Noi stessi trattammo della Diottrica con l'estensione che giudicammo conveniente. Ma ci parve che anche la Catottrica fosse un tema degno di studi ed offrente speculazioni mirabili. È coll'ajuto di essa che si apprende a formare degli specchi ove la destra corrisponde alla destra e la sinistra alla sinistra, in modo che l'assomiglianza è perfetta e le immagini s'accordano con la realtà; inoltre si è in grado di costruire degli specchi dove ci si vede per di dietro, rovesciati, colla testa in basso, con tre occhi e due nasi oppure col viso decomposto come da profondo dolore. La Catottrica non ha soltanto valore teorico, ma possiede delle applicazioni pratiche; infatti, chi non troverà utile di potere osservare gli abitanti di una casa vicina, di vedere quanti siano e che cosa facciano?

La *Catottrica* del Pseudo-Tolomeo poggia, al pari di tutte le opere congeneri, sulla teoria platoniana della visione, e comprende dieci teoremi e nove problemi (risolti questi assai brevemente); fra i primi s'incontrano alcune proposizioni della *Catottrica* euclidea (2), altre nuove, le più importanti delle quali portano i numeri 4 e 5 e sono appunto quelle riferite da Eliodoro o dal suo discepolo Damiano; le rimanenti non sono di tal valore da farci ulteriormente indugiare sopra questo primo lavoro di uno scrittore la cui opera scientifica darà argomento a tutto il Cap. veniente.

Tolomeo e la rifrazione della luce.

59. I lavori sinora discorsi in questo Capitolo trattano con maggiore o minore diffusione ed esattezza delle questioni concernenti la propagazione e la riflessione della luce, ma nessuno si riferisce alla rifrazione; forse che questo importante fenomeno rimase sconosciuto agli antichi? Chiunque ricordi come l'*Almagesto* faccia menzione della rifrazione astronomica (3) risponderà subito negati-

(1) Id., p. 56.

(2) Le proposizioni 7, 8, 9, 10 del Pseudo-Tolomeo corrispondono alle 4, 24, 5 del Pseudo-Euclide.

(3) V. Lib. II, Cap. III (*ed. Halma*, T. I, p. 11) e Lib. VIII, Cap. VI (id., T. II, p. 108).

vamente a tale domanda. Una conferma della giustezza di questa risposta si attinge da un'altra opera di Tolomeo (1) che ci pervenne pel tramite degli Arabi e che è citata (per non allegare che autorità di antica data) da Simplicio ed Eliodoro di Larissa (v. n. 57). Molti storici della fisica e dell'astronomia ne fecero menzione e parecchi eruditi (ad es. il Venturi ed il Caussin) si proposero di pubblicarne la versione dall'arabo in latino che di essa fece nel Sec. XII Eugenio Ammirato (2); ma chi per un motivo, chi per un altro, non tradusse in atto il proprio divisamento; per ciò il 23 Aprile 1871 G. Govi propose all'Accademia delle Scienze di Torino (3) di far trascrivere il migliore (4) dei quattordici codici tuttora esistenti della versione suddetta (5) e di affidarne a lui la pubblicazione; la proposta venne accettata ed il lavoro compiuto tredici anni dopo (6).

L'*Ottica* di Tolomeo non ci pervenne nella sua integrità, giacchè, oltre a piccole e non insignificanti lacune che in essa si notano, ne manca il I Libro e la fine del V. La perdita di quello non è molto deplorevole, perchè dal riassunto, che se ne legge nell'esordio al libro seguente, si deduce che esso non conteneva se non cose che trovansi negli altri scritti ottici a noi noti dei Greci; ma il danno che proviene dalla scomparsa delle altre parti è di malagevole misurazione.

Se di Tolomeo non ci rimanesse altro scritto che l'*Ottica*, lo si dovrebbe giudicare geometra assai mediocre, tanti essendo gli errori

---

(1) Cfr. l'articolo di Th. H. Martin intitolato: *Ptolémée, auteur de l'Optique traduite en latin par Ammiratus Eugenius Siculus sur une traduction arabe incomplète, est-il le même que Claude Ptolémée, auteur de l'Almageste?* (Bull. di Bibl. e Storia ecc., T. IV, 1871, p. 466-467).

(2) M. Amari (*Storia dei Musulmani di Sicilia*, T. III, Parte 2ª, Firenze 1872, p. 657-660) lo crede contemporaneo a Re Ruggiero, morto nel 1154.

(3) *Sulla opportunità di pubblicare una traduzione inedita dell'Ottica di Tolomeo* (Atti della R. Acc. di Torino, T. VI, p. 401-405).

(4) È il Codice Ambrosiano T. 100.

(5) Questi codici sono enumerati nell'ed. del Govi qui appresso citata. V. anche: Boncompagni, *Intorno ad una traduzione latina dell'Ottica di Tolomeo* (Boll. di Bibliogr. e St., T. IV, 1871, p. 470-492 e T. VI, 1873, p. 159-170), e Narducci, *Sur l'optique de Claude Ptolémée* (Bibl. mathematica, 1888, p. 97-102).

(6) G. Govi, *L'Ottica di Claudio Tolomeo, di Eugenio Ammiraglio di Sicilia — Scrittore del Secolo XII, ridotta in latino sovra la traduzione araba di un testo greco imperfetto, ora per la prima volta pubblicata* (Torino, 1884).

che ivi si riscontrano e che non si possono addebitare agli amanuensi ed ai traduttori. Inoltre le soluzioni di molte questioni sono viziate dall'essere fondate sul seguente principio evidentemente falso (benchè universalmente ammesso dagli antichi): " l'immagine di un punto sopra uno specchio sta all'incontro di due linee di cui una va dal punto luminoso al centro di curvatura dello specchio e l'altra dall'occhio al punto dello specchio ove avviene la riflessione „; Tolomeo se ne serve in particolare per risolvere diversi casi speciali della seguente questione (che in generale dipende da un'equazione biquadratica ed è oggi chiamata *problema di Alhazen* (1)): " Essendo dati una superficie sferica riflettente, la posizione di un punto luminoso e quella di un punto per cui deve passare il raggio riflesso, determinare il punto dello specchio ove accadrà la riflessione „.

Ma se Tolomeo nell'*Ottica* non brilla come matematico, fa per compenso eccellente figura come fisico, giacchè le esperienze che egli descrive per verificare la legge della riflessione e scoprire quella che governa la rifrazione (nel passaggio dall'aria nell'acqua o nel vetro, oppure dall'acqua nel vetro) lasciano poco a desiderare.

È nel V libro della sua *Ottica* che Tolomeo tratta *ex-professo* della rifrazione (2), fenomeno di cui aveva fatto già cenno nei Libri II e III (3); ivi presenta al lettore delle tavole dei valori degli angoli di rifrazione (r) che corrispondono a dati valori degli angoli d'incidenza (i), tavole che sono calcolate supponendo che fra i e r sussista un'equazione del seguente tipo

$$r = ai - bi^2,$$

a e b essendo costanti. Questa relazione non è quella di Snellio-Descartes, nè ad essa è molto prossima; venne da noi qui ricordata come primo tentativo per risolvere una questione fisica interessante tanto la teoria quanto la pratica, e come punto saliente di un'opera del sommo astronomo, sopra la quale nulla ci trattiene ulteriormente e su cui forse i matematici puri ci rimprovereranno di esserci troppo a lungo indugiati.

---

(1) V. *Opticae Thesaurus Alhazeni Arabis libri septem nunc primum edidit* (Basileae, MDLXXII).

(2) *Ottica*, ed. Govi, p. 142 e seg.

(3) Id., p. 77.

L'Idrostatica in Archimede.

60. In un campo d'investigazioni più esatte, conclusive ed importanti ci riconduce l'esame dell'opera di Archimede *De iis, quae in humido vehuntur* (1), nella quale si rinvengono posti, svolti ed applicati quei principî su cui si erige l'odierna meccanica dei fluidi (2). Due sole ipotesi servono di fondamento all'edificio archimedeo; una afferma che in un fluido la parte meno compressa è cacciata da quella che è più compressa e che ogni parte è premuta da tutte le parti sovrastanti, l'altra dice che la spinta verso l'alto ricevuta da un solido immerso in un liquido è una forza avente come linea di azione la verticale passante pel centro di gravità del solido. Per servirsene Archimede premette il teorema: " se una superficie è segata secondo circoli da tutti i piani passanti per un punto fisso, essa è una sfera avente per centro questo punto „ e ne deduce che " la superficie di livello di un liquido stagnante appartiene ad una sfera concentrica alla terra „. Stabilite poi (Prop. 3, 4 e 5) le condizioni di equilibrio di un solido immerso in un liquido, Archimede dimostra (Prop. 6) che " se si immerge un solido in un liquido più pesante esso tenderà ad uscirne con uno slancio proporzionale alla differenza tra le densità dei due corpi „, ed arriva finalmente a quella proposizione che porta oggi il nome di " principio di Archimede „ (Prop. 7) (3). Ne deduce tosto che un segmento sferico abbandonato in un fluido si disporrà in equilibrio colla base orizzontale, tanto se questa è sommersa quanto se emerge dal liquido (Proposizioni 8 e 9).

---

(1) Per qual via essa sia giunta sino a noi venne narrato nel L. II, n. 37. Una pregevole traduzione commentata di essa venne di recente pubblicata da A. Legrand (*Le traité des corps flottans d' Archimède*, Journal de Physique, 2ᵉ Série, T. X, 1891).

(2) « Il est étrange » osserva a ragione C. Thurot (*Recherches sur le principe d'Archimède*, Revue archéologique, T. XIX, 1869, p. 47) « que Pappus (fin du IV siècle de l'ère chrétienne) ait cité » (*ed. Hultsch*, p. 1026) « le *traité des corps flottants* comme un ouvrage de mécanique appliquée et amusante avec ceux de Hèron: évidemment il n'en connaissai que le titre ».

(3) Servendosi di questa proposizione si può ricostruire, in modo assai verosimile, il procedimento con cui Archimede ha risolto il celebre problema della corona di cui ci occuperemo nel L. V (n. 60): v. Heath, *The Works of Archimedes edited in modern notations* (Cambridge, 1897), p. 259-260.

Tale è per sommi capi il contenuto del I Libro del lavoro idrostatico Archimedeo. Temi analoghi, ma più elevati, sono trattati nelle dieci proposizioni che costituiscono il II. Nel quale — dopo di avere dimostrato che " se un solido è parzialmente immerso in un fluido più pesante, il rapporto della densità di quello alla densità di questo è eguale al rapporto del peso che ha la parte immersa al peso di tutto il solido " — vengono studiate le condizioni di equilibrio di un segmento retto di paraboloide ellittico di rotazione immerso in un fluido. Ricordiamo (v. L. II, n. 37, nota) che Archimede suppone che il lettore conosca la posizione del centro di gravità di quel segmento, il che induce a credere che egli se ne fosse anteriormente occupato, in qualche opera oggi perduta. Le conclusioni a cui egli perviene si possono riassumere così: " Detto h l'asse del segmento paraboloidico e p il parametro della parabola generatrice, esso si disporrà sempre colla base orizzontale se $h \leqq \frac{3}{2}p$; ma lo stesso accadrà nella ipotesi contraria se di più si supponga che il rapporto fra la densità del solido e quella del fluido sia $\geqq \left(1 - \frac{3p}{2h}\right)^2$ ovvero che sia $\frac{3}{2}p < h < \frac{15}{8}p$. Se invece il rapporto di queste densità è $< \left(1 - \frac{3p}{2h}\right)^2$, il conoide si disporrà colla base inclinata sulla superficie del liquido, tanto se la base è esterna al liquido, quanto se è immersa ". In altri casi il conoide subisce un rovesciamento. Queste conclusioni sono di così alto interesse scientifico che col loro valore mostrano come i due libri dedicati da Archimede alla meccanica dei fluidi, benchè giunti a noi deturpati e mutili, siano meritevoli di stare accanto a quelli *Su la sfera ed il cilindro* e *Su i conoidi e gli sferoidi;* d'altronde ad assicurar loro perenne rinomanza basterebbero le parole con cui Lagrange formulò il proprio giudizio sul secondo: " Ce livre, egli scrisse, est un des plus beaux monuments du génie d'Archimède, et renferme une théorie de la stabilité des corps flottants, à laquelle les modernes ont peu ajouté " (1).

---

(1) *Mécanique analytique*, Nouv. éd., T. I (Paris, 1811), p. 176.

La Statica in Erone.

61. Negli interessanti suoi studî di idrostatica Archimede non ebbe nell' antichità alcun discepolo o continuatore; dopo di lui quella scienza venne abbandonata sino ai tempi di Galileo e Stevino. Invece nelle sue indagini — parte conservate e parte perdute (v. L. II, n. 34) — sulla meccanica dei solidi egli trovò un imitatore in uno scienziato, di cui ci occuperemo colla larghezza che merita nel prossimo venturo Capitolo, ma della cui operosità ora dobbiamo descrivere una faccia: parliamo di Erone d' Alessandria.

Erone come meccanico (1) è indiscutibilmente discepolo di Aristotele, benchè egli nol dichiari, e lo è pure di Archimede che cita a più riprese (2); di tali citazioni anzi potrebbe trarre gran profitto chi volesse rendere meno incerti i contorni della figura del grande Siracusano, considerato come principale autore della statica razionale de' Greci. Se egli abbia attinto anche ad Euclide — di cui esiste un frammento sulla teoria della leva che il Woepcke fece conoscere mezzo secolo fa (3) e che il Vailati di recente studiò con diligenza ed acume (4) — non possiam dire, chè il nome di Euclide non s'incontra nella *Meccanica* di Erone, nè è lecito asserire che egli appartenesse al gruppo di coloro che questi raccoglie sotto il nome generico di " predecessori " (5).

Benchè la *Meccanica* di Erone abbia un'indirizzo indiscutibilmente pratico, conforme alle idee di chi proclamava essere " la

---

(1) Vedi: Carra de Vaux, *Les mécaniques où l'Élévateur de Héron d'Alexandrie publiés pour la première fois sur la version arabe de Qostâ ibn Lûqâ et traduit en français. Extrait du « Journal Asiatique »* (Paris, 1894). Cfr. anche l'ultimo Libro della *Collezione* di Pappo.

(2) Carra de Vaux, p. 45, 73, 74, 77, 88, 107, 152.

(3) *Notice sur des traductions arabes de deux ouvrage d'Euclide* (Journ. Asiatique, V Serie, T. XVIII, 1851).

(4) *Di una dimostrazione del principio della leva attribuita ad Archimede* (*Boll. di Bibl. e Storia matematica* posto in appendice al Vol. XXXV, 1897, del *Giornale di Matematiche*). V. anche la prima parte dell'articolo di M. Curtze, *Zwei Beiträge zur Geschichte der Physik im Mittelalter* (*Bibliotheca mathematica*, 3.a Serie, T. I, 1900, p. 51-54).

(5) Carra de Vaux, p. 163.

esperienza la migliore educatrice „ (1), pure essa prova come i Greci fossero riusciti a fornire di solido scheletro matematico la teoria dei moti e delle forze, intento che avevano raggiunto per l'astronomia, ma che invano avevano tentato di conseguire per altri rami della fisica. In conseguenza percorrendo i tre libri di Erone si trovano da spigolare alcuni interessanti nuovi dati di fatto relativi all'antica geometria. Ed infatti, già nel primo libro — contenente una " prima introduzione alle arti meccaniche „ (2) —, c'imbattiamo in considerazioni geometriche illustranti la teoria degli ingranaggi, teoria che viene ivi applicata al problema " di sollevare un peso conosciuto con una forza data „. Ivi si trovano poi delle pagine di alto interesse, nelle quali viene insegnato un modo per " costruire una figura piana o solida, la quale sia simile ad un'altra ed il cui contenuto abbia un rapporto assegnato col contenuto di questa „; se si tratta di figure piane il problema si esaurisce colla costruzione di una media proporzionale, ma per figure solide esso esige la inserzione di due medie proporzionali.

Come dunque troveremo due medie proporzionali consecuitive tra due rette date? chiede Erone (3), e prosegue (4): Faremo questa dimostrazione con un metodo che non esigerà la considerazione dei solidi e ci condurrà al modo di operare il più semplice. Siano (fig. 19ª) $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ le due rette date; una è perpendicolare al l'altra; sono le due linee fra cui noi vogliamo trovare due medie proporzionali. Completiamo il rettangolo $\alpha\beta\gamma\delta$, conducendo le due rette $\delta\gamma$, $\delta\alpha$; uniamo β a δ, e γ a α; poi facciamo passare pel punto β una riga che tagli le due rette $\delta\varepsilon$, $\delta\zeta$ e che noi, mediante rotazione, disporremo in una posizione tale che le rette uscenti dal punto η e terminate ai punti d'intersezione della riga con le rette $\gamma\varepsilon$, $\alpha\zeta$ siano fra loro eguali (5). Dico che le rette $\alpha\zeta$, $\gamma\varepsilon$ sono medie proporzionali tra le due rette $\alpha\beta$, $\beta\gamma$; $\alpha\beta$ sarà il primo termine dei rapporti, $\alpha\zeta$ il secondo, $\gamma\varepsilon$ il terzo e $\gamma\beta$ il quarto. Infatti il quadrilatero $\alpha\beta\gamma\delta$ ha i lati a due a due paralleli e gli angoli retti. Dunque le quattro rette $\delta\eta$, $\eta\alpha$, $\eta\beta$, $\eta\gamma$ sono eguali. La linea $\eta\delta$ essendo eguale alla linea $\eta\alpha$ e la linea $\eta\zeta$ essendo già stata condotta, abbiamo

---

(1) Id., p. 69.

(2) Id., p. 92.

(3) Id., p. 52.

(4) Cfr. quanto segue colla soluzione suggerita da Apollonio pel problema di Delo (L. II n. 68).

(5) Questo problema d'inserzione, che Erone scioglie per tentativi, si può risolvere col mezzo delle intersezioni di un circolo con una iperbola equilatera: v. Heath, *Apollonius of Perga Treatise on Conic Sections edited in modern notation* (Cambridge, 1896), p. CXXVI.

$$\delta\zeta \times \zeta\alpha + \overline{\alpha\eta}^2 = \overline{\eta\zeta}^2,$$

e similmente

$$\delta\varepsilon \times \varepsilon\gamma + \overline{\gamma\eta}^2 = \overline{\eta\varepsilon}^2.$$

Ora le due linee $\varepsilon\eta$, $\eta\zeta$ sono eguali; onde risulta

$$\delta\zeta \times \zeta\alpha + \overline{\alpha\eta}^2 = \delta\varepsilon \times \varepsilon\gamma + \overline{\gamma\eta}^2.$$

Ma $\overline{\gamma\eta}^2 = \overline{\alpha\eta}^2$, onde resta

$$\delta\zeta \times \zeta\alpha = \delta\varepsilon \times \varepsilon\gamma$$

ossia

$$\frac{\varepsilon\delta}{\zeta\alpha} = \frac{\delta\zeta}{\gamma\varepsilon}.$$

D'altronde si ha

$$\frac{\varepsilon\delta}{\delta\zeta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\zeta} = \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma\beta};$$

dunque i rapporti $\frac{\alpha\zeta}{\gamma\varepsilon}$ e $\frac{\gamma\varepsilon}{\beta\gamma}$ sono eguali al rapporto $\frac{\alpha\beta}{\alpha\zeta}$.

Abbiamo così costruite due medie proporzionali consecutive tra $\alpha\beta$ e $\beta\gamma$, cioè le due $\alpha\zeta$ e $\gamma\varepsilon$. È quanto volevamo dimostrare.

In seguito Erone introduce (1) il concetto di figure " simili e similmente poste ", che egli distingue da quelle soltanto simili e che insegna a descrivere meccanicamente con appositi strumenti, dei quali debbono prender nota coloro che intendono redigere un catalogo completo degli apparati matematici.

62. La descrizione e la spiegazione del metodo di agire delle cinque macchine semplici (ε′ δυνάμεις) (2) — che sono il verricello (ἄξων ἐν περιτονίῳ), la leva (μοχλός), le taglie (πολύσπαστον), il cuneo (σφήν) e la vite (κοχλίας) —, ecco lo scopo precipuo del II dei libri meccanici di Erone (3); che ivi l'autore abbia spiegata scarsa originalità viene da lui stesso affermato nell'esordio del libro successivo (4); esso però non è agli occhi nostri destituito di valore,

(1) Id. p. 54.

(2) Una congettura sulla via che guidò a concepirle leggesi in Montucla. *Hist. des Math.*, T. I (2.ª ed.) p. 98.

(3) Cfr. Vailati, *Il principio dei lavori virtuali da Aristotele a Erone d'Alessandria* (Atti della R. Acc. di Torino, T. XXXII, 1897).

(4) Carra de Vaux, p. 163.

perchè ci insegna la definizione ed una proprietà dell'elica cilindrica, che Erone desunse probabilmente dall'opera di Apollonio (L. II, n. 68) oggi perduta sull'argomento. Il passo relativo ci sembra anzi meritevole di venir quì riferito (1):

Noi definiamo nel seguente modo la natura della linea tracciata sulla vite: supponiamo che una delle generatrici di una figura cilindrica si muova sulla superficie del cilindro e che un punto si muova sopra questa generatrice a partire dal suo estremo; questo punto percorre tutta la generatrice nel tempo che questa impiega a fare il giro della superficie cilindrica sino a ritornare alla posizione d'onde è partita. La curva descritta da quel punto sulla superficie del cilindro è un giro di vite: è quello che chiamasi vite. Volendo tracciare questa linea sulla superficie del cilindro, opereremo in questo modo: noi diamo in un piano due rette fra loro perpendicolari, eguali una alla generatrice del cilindro e l'altra alla periferia della sua base, ed uniamo le estremità di queste linee, che comprendono un angolo retto, mediante una retta che sottende l'angolo retto. Applicando la retta eguale alla generatrice di un cilindro sopra una generatrice e la linea eguale alla circonferenza base del cilindro su questa circonferenza, la linea che sottende l'angolo retto si avvolge allora sulla superficie del cilindro e vi descrive un giro di vite.

Noti quì il lettore il concetto di sviluppo di una superficie cilindrica sopra di un piano.

Mentre nell'esporre la teoria della vite Erone si è probabilmente appoggiato alle indagini di Apollonio Pergeo, per redigere la teoria dei centri di gravità (2) ricorse, per sua esplicita dichiarazione, ad Archimede. Quale fondamento di tale teoria egli pone la determinazione del centro di gravità di un triangolo (3), punto che Erone determina come intersezione di due mediane, od anche come punto il quale divide ogni mediana in due parti tali che quella adiacente ad un lato è metà di quella contigua al vertice opposto. La determinazione analoga per un quadrilatero si opera dividendo questo in due triangoli col mezzo di una diagonale, e per un pentagono dividendolo in un quadrilatero ed un triangolo, pure col mezzo di una diagonale. A questi problemi Erone ne collega altri ed altri ancora, molti dei quali sono originali e riempiono il III de' suoi libri; l'intento essenzialmente meccanico che essi hanno ci esonera dal diffonderci sul loro scopo e sulle loro soluzioni. Il sin

(1) Id. p. 101.

(2) Cfr. Vailati, *Del concetto di centro di gravità nella statica di Archimede* (Atti della R. Accademia di Torino T. XXXII, 1897).

(3) Carra de Vaux l. c. p. 152-4.

quì detto serva al lettore come primo saggio delle molte opere dell'uomo eminente a cui è dedicato il capitolo che ora imprendiamo.

V.

Erone d'Alessandria.

63. Ciascuno degli scienziati di cui ci occupammo nei primi tre Libri dell'opera presente possiede, considerato almeno come essere pensante, se non come uomo agente, una fisonomia ben determinata: di alcuni conosciamo nel suo complesso la produzione scientifica, di altri un'opera soltanto, talora la soluzione di un solo problema; il nome degli uni è legato ad un vasto campo d'investigazioni, mentre quello di altri s'incontra unicamente connesso ad una questione particolare; ma, per ognuno, le caratteristiche che interessano lo storico delle scienze esatte sono sufficientemente determinate. Ora però, proseguendo nella nostra rassegna della produzione matematica del popolo ellèno, c'imbattiamo in una collezione assai confusa di scritti diversi (costituenti il nucleo della letteratura geodetica dei Greci), i quali vanno sotto il nome di Erone (1). E siccome tanto prima quanto dopo l'E. v. il nome di Erone era molto diffuso (2), così fa mestieri distribuire fra gli Eroni noti gli ingredienti di quella raccolta, per poi determinare l'epoca a cui questi appartengono. Tal problema — di consueto chiamato *questione eroniana* — è assai complicato, e tanto più lo diventa notando, col Vincent (3), che il nome di Erone è di origine egiziana e sulle rive del Nilo aveva un significato analogo a quello che ha per noi il vocabolo *ingegnere:* questa osservazione, combinata con quella che nella collezione eroniana emergono per numero e valore gli scritti concernenti le scienze

(1) Essi vennero utilizzati grandemente dai Romani quando Augusto effettuò la misura dell'impero che Giulio Cesare aveva progettata.

(2) Basti dire che di individui di tal nome si è serbato il ricordo di ventuno (che forse sono da ridursi a diciotto), la metà dei quali consta di scrittori.

(3) *Extraits des manuscrits relatifs à la géométrie pratique des Grecs* (Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale etc., T. XIX, II^{e} Partie, 1858), p. 163, nota.

fisico-matematiche, fa nascere il sospetto che come eroniane siansi considerate tutte le opere aventi per soggetto le applicazioni pratiche delle matematiche e specialmente la scienza delle costruzioni. Si aggiunga che le innumerevoli interpolazioni e mutilazioni, che i manoscritti intestati col nome di Erone subirono per opera di ignoti (1), rendono impossibile formarsi un concetto della loro primitiva redazione, epperò obbligano a grande prudenza nel pronunciarsi intorno al loro valore ed alla loro derivazione (2).

Un contributo importante alla soluzione della questione eroniana fu arrecato, in principio del secolo presente, dal Venturi col secondo de' suoi *Commentarj sopra la storia e la teoria dell' ottica* (3). Molto minor valore possiede una memoria del Letronne, coronata nel 1816 dall' Istituto di Francia, ma di cui forse l' autore stesso non era soddisfatto, poichè mai si decise di darla alle stampe (4). Nel 1854 la questione di cui ci occupiamo fu trattata da T. H. Martin con mirabile precisione e chiarezza (5): le conclusioni a cui egli pervenne possiedono quel grado di attendibilità che è sperabile rag-

(1) « Die bis auf unsere Zeit gekommenen Heronischen Texte sind echt, insofern sie den Autornamen und in der Hauptsache anch die ursprüngliche Anlage und Gestaltung der Heronischen Werke bewahrt haben, unecht aber insofern, als sie in stetigen Dienste der Praxis zu wiederholten Malen neu aufgelegt und dabei je nach den Zeitbedürfnisse überarbeiten worden sind ». Hultsch, in *Litter. Centralblatt*, 1894, p. 555.

(2) A conferma di ciò possono valere le seguenti frasi del Vincent; « Suivant moi, il a dû exister, sous le nom de Héron, et cela dès une epoque très élevée, une vaste composition qui, servant de texte pour l'enseignement des écoles, s'est transmise, de siècle en siècle, en subissant des modifications successives, des additions, des mutilations, des interpolations. Les professeur enseignaient Héron comme nous avons vu enseigner Euclide, c' est-à-dire chacun à sa manière, s'accordant sur le fond, mais variant à l'infini dans les détails; c' est ainsi que nous avons eu l' Euclide de Clavius, l' Euclide Tacquet, celui d' Henrion, celui d' Ozanam, et cent autres. De même donc chaque professeur rédigeait à sa manière et dictait son Héron ». (*Extraits* citati, p. 163).

(3) Bologna, 1814, p. 77-147.

(4) Venne pubblicata nel 1851 dal Vincent col titolo: *Recherches sur le fragments d' Héron d' Alexandrie, ou du système métrique égyptien.* È basata sulla premessa — giudicata ormai inaccettabile — che tutti i lavori che portano il nome di Erone siano opere di uno scrittore del V Secolo dell' E. v.

(5) *Recherches sur la vie et les ouvrages d' Héron d' Alexandrie disciple de Ctésibius et sur tous les ouvrages mathématique grecs conservés ou perdus, publiés ou inédits, qui ont été attribués à un auteur nommé Héron* (Mém. prés. par divers savants à l' Acad. des Inscript. et Belles-Lettres, I Serie, T. IV, 1855).

giungere in argomenti siffatti, onde vennero in generale accettate, nè subirono gravi attacchi da parte di coloro che si occuparono in seguito della geodesia dei Greci. Ciò non toglie che il problema storico che da Erone prende nome è tuttora ben lungi dall'essere definitivamente risoluto; esso deve per converso collocarsi accanto ai numerosi enigmi in attesa di un Edipo, dei quali è troppo ricca la storia della matematica greca; noi ci limiteremo a riferire imparzialmente in quale stato esso oggi si trovi.

64. Fra i personaggi greci che portarono il nome di Erone, tre si occuparono di matematica. Sono: 1.° Erone d'Alessandria, citato da Eutocio (1) e Pappo (cf. n. 61); 2.° un altro Erone che fu maestro a Proclo (L. IV, n. 25) e che taluno vorrebbe identificare con un Erone al quale viene attribuito un commento sull'*Introduzione all'aritmetica* di Nicomaso Geraseno; 3.° un mediocre geodeta bizantino di cui diremo qualchecosa nel Cap. seg. (n. 73). Al primo si fa risalire la maggior parte dei manoscritti aventi per autore un Erone; sopra di esso, un dato da tutti considerato per certo è quello relativo alla patria, che concordemente si ritiene essere Alessandria (2). Basandosi poi sopra un'ovvia interpretazione del titolo affisso a certi manoscritti eroniani, si considerò per molto tempo essere Erone discepolo di Ctesibio; e poichè si riteneva certo che questi avesse vissuto sotto il settimo de' Tolomei (Tolomeo Evergete II) — il cui regno di 53 anni finì al termine del 117 o al principio del 116 a. C. — così si concluse avere Erone fiorito circa cent'anni innanzi la nascita di G. C., essersi forse la sua esistenza protratta sin verso il 50 a. C. Ma tanto su quell'interpretazione, quanto su la determinazione cronologica concernente Ctesibio vennero elevate serie obbiezioni (3). Inoltre H. Diels (4), osservando (come già aveva fatto il Martin) i frequenti latinismi che bruttano la lingua di

---

(1) *Archimede ed. Heiberg*, T. III, p. 71, 141 e 271. Da taluno esso è designato come Erone « il vecchio ».

(2) Egual valore ha l'osservazione che Erone è posteriore ad Eudosso ed Archimede che vedemmo (n. 61) e vedremo (n. 71) da lui rammentati.

(3) Veggasi W. Schmidt nell'introduzione a *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia*, Vol. I (Lipsiae, 1899). p. X.

(4) *Uber das physikalische System des Straton* (Sitzungsber. d. K. Pr. Akad. der Wiss.; phil. — hist. Cl., 23 Februar 1893).

Erone, sostenne che questi visse, se non dopo, al principio dell'E. v. Tale conclusione vien confermata osservando che Erone ha sfruttati dei dati fisici e matematici somministrati da Posidonio di Apamea; ora poichè lo stoico Posidonio, maestro di Cicerone, ha vissuto sin verso la prima metà del I secolo a. C., così Erone non può essere anteriore a tale secolo (1). Così resterebbero escluse senz'altro le opinioni di F. Haase, che fa vivere Erone verso la metà del III Sec. a. C. (2), del Susemihl, che lo fa più giovane di mezzo secolo (3), e dell'Hultsch (4), che lo fa fiorire verso la fine del II Sec. a. C.; e sembrano per converso ammissibili le opinioni del Martin, che pone Erone intorno alla metà del I Sec. a. C., del Cantor (5), che lo considera appartenente a questo secolo, senza più precisa determinazione, del Carra de Vaux (6), del Tannery (7) e del Diels che — appoggiandosi al manoscritto arabo di cui parlammo nel n. 61 — lo porterebbero al II Sec.: vennero però già addotti degli argomenti per combattere tale illazione e sostenere che Erone è anteriore all'anno 50 dell'E. v. ed a Claudio Tolomeo (8)! Chiudiamo questa lunga enumerazione di avvisi contraddittori — nella quale fedelmente rispecchiasi l'esiguità di dati sicuri — notando lo strano fatto che, nè Vitruvio cita Erone, nè questi quello: così si dilegua una speranza di ajuto che spontaneamente sorgeva; nè altre è lecito nutrirne, se non in eventuali scoperte di nuovi documenti sino ad oggi ignorati.

65. A qualche cosa di più concreto giungeremo esaminando le opere che portano il nome di Erone; chè, sfrondandole anche da tutti gli sviluppi concernenti le applicazioni pratiche della matematica (9), troveremo come residuo una bella raccolta di verità atte

---

(1) Schmidt, op. cit., p. XVI.

(2) *Ueber die griechischen und lateinischen Kriegsschriftsteller* (Neue Jahrb. für Phil. und Pädag., T. XIV, 1835, p. 112).

(3) *Gesch. der griech. Litt.*, T. I, p. 737.

(4) *Metrologicorum scriptorum Reliquiae*, T. I (Lipsiae, 1864) p. 5.

(5) *Vorselungen*, T. I (2.ª ed.) p. 347.

(6) *Les mécaniques ou l'élevateur de Héron* etc., p. IX.

(7) *Bull. des Sc. math.*, 1894. I P., p. 206.

(8) Schmidt, op. cit., p. XXIII-XXV.

(9) Cioè l'aritmetica pratica e la geodesia, l'ottica (v. n. 58), la meccanica (v. n. 61-62) e l'astronomia; l'epiteto « il Meccanico » dato ad Erone (v. ad es. Montucla, *Hist. des*

a completare in modo notevole le discipline di cui Euclide ci tramandò il fondamento, verità che — se anche non appartengono tutte ad Erone (1) — pure meritano di restar collegate alla sua memoria.

Non ci occuperemo dei due libri intitolati Πνευματικῶν, nè di quello Περὶ αὐτοματοποιητικῆς, nè di alcuni frammenti sopra gli orologi ad acqua (2), nè di altri congeneri (cf. L. I, n. 76 in fine), chè lo studio di essi appartiene esclusivamente ai cultori della fisica, teorica od applicata; altrettanto facciamo riguardo ad un' opera sulle macchine da guerra (Βελοποιϊκά), solo rilevando in essa la presenza del procedimento per inserire due medie proporzionali fra due rette date che trovammo già (n. 62) nell' *Elevatore* dell' autor nostro.

Ma esiste integralmente un altro lavoro — περὶ διόπτρας — sul quale è dovere nostro l' arrestarci, giacchè — come già scrisse lo Chasles (3) — esso è da considerarsi come un documento prezioso della geometria greca, il quale deve prendere posto in seguito alle opere di Euclide, Archimede e Apollonio; inoltre esso, dandoci qualche notizia sull' antica Geodesia, colma una lacuna esistente nella collezione degli scritti scientifici dell' antichità (4). Per la prima volta esso venne pubblicato tradotto in italiano (col titolo *Il Traguardo*) ed in parte abbreviato dal Venturi nell' opera surriferita; più tardi l' originale greco, accompagnato da una fedele traduzione

Math., T, I, p. 262) sembra indicare che come meccanico fosse specialmente pregiato nell' antichità; ma le seguenti parole, che si leggono in uno scritto geodetico che esamineremo nel n. 73, fanno fede della considerazione che egli godeva anche come geometra: « Riguardo alla misura delle figure chiamate trapezî e trapezoidi (classificate così in base all' eguaglianza degli angoli), come pure delle figure classificate o non classificate, Archimede ed Erone ne diedero nei loro trattati, delle dimostrazioni complete ».

(1) La scarsità di citazioni fatte da Erone rende impossibile discernere le proposizioni originali da quelle riferite; sembra tuttavia che queste siano più numerose di quelle.

(2) Questi lavori sono tutti raccolti nel T. I di *Heronis Opera omnia*. Cfr. W. Schmidt. *Heron von Alexandris* (*Neues Jahrb. für das klass. Alterthum, Geschichte und deutsche Literatur*, 1899).

(3) *Aperçu historique* (II ed., Paris, 1875), p. 544.

(4) In modo analogo si esprime il Vincent: « Entre la *géométrie élémentaire* des Grecs représentée par Euclide, et la *géométrie supérieure*, sur laquelle nous possedons d'admirables ouvrages, ceux d'Apollonius de Perge, par exemple, il est une troisième branche de la science, intermédiaire en quelque sorte entre les deux autres, et dont, jusqu'à présent, l' histoire est à peine connue: c'est la *géométrie pratique* ou *géodésie*. que l' on peut personnifier sous le nom d'Héron ». (*Extraits* etc.. p. 161).

francese, dal Vincent in uno scritto che pure già citammo; il Venturi prima, in seguito il Martin e da ultimo il Vincent addussero ragioni così convincenti per attribuire ad Erone il lavoro di cui è parola, che ormai nessuno più dubita che a costui ne appartenga la paternità.

Il titolo di esso ha origine in uno strumento geodetico, colla descrizione del quale ha principio la memoria eroniana; l'idea che dell' istrumento stesso si è formato il Venturi, è un po' diversa da quella che ne ha il Vincent, perchè quegli ammette nell' originale una lacuna che questi non ha avvertita; ma ciò a noi non interessa; ci basti rilevare che, comunque s'interpretino le parole di Erone, sempre si conclude che il traguardo prestava agli antichi gli stessi servigi che ai moderni offre il teodolite (1).

Sul fine e sul grado di originalità dello scritto di cui ci occupiamo, dà notizie l' esordio di esso, che quì riferiamo:

Siccome l'uso della diottra porge delle applicazioni molteplici ed indispensabili agli usi della vita e se ne è molto parlato, ritengo che sia necessario di mettere in iscritto le osservazioni dei nostri predecessori — osservazioni importanti, come dissi testè — ed in pari tempo di rettificare quello che ne è stato detto con troppo poca esattezza. Però non credo necessario di riferire quì tutto quello che si trova male esposto o erroneo od interamente falso negli autori che ci precedettero: chi lo voglia, potrà sempre giudicare da sè qual differenza si trovi tra essi e noi. Non è tutto: coloro che descrissero siffatte operazioni, non seppero fondarne l'esecuzione sull'impiego di un medesimo strumento; eppure i loro apparecchî, per quanto numerosi e varî, non somministrano che le soluzioni di un piccolo numero di problemi. Noi, all'opposto, non solo ci siamo imposti di risolvere collo stesso strumento tutte le questioni già trattate in passato; ma di più ci lusinghiamo che qualunque altra questione, che si potrà proporre, verrà risoluta con eguale facilità col mezzo della nostra diottra.

Da questo squarcio emerge non essere Erone il primo greco che siasi occupato di geodesia (2), ma sembra che egli vi abbia introdotto il concetto importantissimo dell' unità di metodo; la sua opera scientifica appare pertanto somigliante a quelle di Euclide e di Tolomeo: ma, se la scarsità delle notizie intorno alla geometria preeuclidea rende malagevole il misurare quanto ha operato il sommo

(1) Cf. le figure che si trovano in Vincent, p. 180-181.

(2) Ciò, d'altronde, risulta anche dal paragonare i teoremi enunciati nel n. seg. con quelli di cui si attribuisce la soluzione a Talete (L. I, n. 8) e con alcuni che notammo (n. 54) nell' *Ottica* di Euclide.

Alessandrino, se la perdita delle più importanti opere di Ipparco vieta si pronunzî un giudizio definitivo sulla originalità di Tolomeo, ci troviamo, nel momento attuale, in condizioni anche peggiori, essendo pressochè nulle le nostre cognizioni sulla geodesia greca preeroniana (1). Tuttavia le parole di chiusa dell'esordio riferito sembrano attestare che Erone sia l'inventore dello strumento di cui si serve; mentre le frasi con cui esso comincia affermano l'esistenza di altri apparati analoghi; ed infatti è noto che i Greci chiamavano διόπτρα qualunque strumento attraverso a cui si mirava.

66. La prefazione testè trascritta occupa il § I dell'opuscolo di Erone; la descrizione della diottra occupa i quattro successivi; ecco i temi degli altri trentadue: VI. Determinare la differenza di livello fra due punti dati. VII. Congiungere mediante una retta due punti, dall'uno dei quali non si può vedere l'altro. VIII. Misurare la distanza ridotta all'orizzonte tra il punto dove si trova l'osservatore ed un punto lontano. IX. Misurare la larghezza di un fiume. X. Misurare la distanza di punti inaccessibili. XI. Data una retta, condurre ad essa una perpendicolare da un estremo, senz'avvicinarsi alla retta od all'estremo. XII. Misurare l'altezza di un punto inaccessibile. XIII. Determinare la differenza di altezza di due punti inaccessibili, la loro distanza e la direzione della loro congiungente. XIV. Determinare la profondità di una fossa. XV. Traforare una montagna secondo una retta che congiunge due punti dati sulle sue falde. XVI. Scavare in una montagna dei pozzi che cadano verticalmente su di una caverna. XVII. Data una galleria sotterranea di forma arbitraria, determinare sul terreno sovrastante un punto tale che, scavando ivi un pozzo verticale, si arrivi ad un punto assegnato della galleria. XVIII. Tracciare il contorno di una sponda secondo un arco di cerchio od una curva qualunque. XIX. Fare un mucchio di terra avente la forma di un dato segmento sferico. XX. Dare ad un terreno una assegnata inclinazione. XXI. Fissare, su una retta orizzontale avente per un estremo l'osservatore, un punto che disti di una data lunghezza dall'osservatore stesso. XXII. Trovare un punto che disti di una lunghezza data da un dato punto

(1) Si può dire che queste riducansi all'osservazione del Vincent (l. c. p. 174-175) che quel Bitone, scrittore sulle macchine da guerra (v. *Mathematici veteres*, p. 108) è probabilmente uno di quelli che Erone designa come suoi « predecessori »,

inaccessibile. XXIII-XXIV. Misurare un campo. XXV. Supposto che siano scomparsi tutti i confini di un campo, tranne due o tre, trovare quelli perduti conoscendo un disegno del campo. XXVI. Dividere un campo in parti assegnate col mezzo di rette uscenti da un punto interno. XXVII. Misurare un campo nel quale non si può penetrare. XXVIII-XXIX. Dividere un trapezio od un triangolo in un dato rapporto mediante una parallela alla base. XXX. Trovare l'area di un triangolo in funzione dei lati. XXXI. Determinare l'efflusso di una fontana. XXXII. Determinare la distanza angolare fra due astri. XXXIII. Critica dell'istrumento detto " asterisco „ o " stelletta „. XXXIV. Descrizione ed uso dell' " odometro „. XXXV. Misura del cammino percorso da una nave. XXXVI. Determinare la distanza fra due punti posti in climi differenti. XXXVII. Muovere un dato peso con una data potenza servendosi di un sistema di ruote dentate.

Quest' ultimo articolo — venne osservato a ragione — non appartiene al trattato del *Traguardo,* ma taluno ve lo aggiunse come parto indubitato di Erone. Quanto al problema XXV, esso evidentemente rientra nella categoria di quelli la cui soluzione era resa necessaria dalle periodiche innondazioni del Nilo, mentre quelli che portano i numeri XXVI, XXVIII e XXIX rappresentano dei punti di contatto col trattato perduto di Euclide *Della divisione delle figure* (L. II, n. 26); crediamo perciò arrestarci un istante sopra uno almeno di essi. Sceglieremo il seguente:

XXVIII. Dato un trapezio ΑΒΓΔ, come pure i suoi due lati paralleli ΑΔ, ΒΓ e la retta ad essi perpendicolare, condurre una retta ΕΖ parallela alla base ΑΔ in modo da tagliare dal trapezio un trapezio ΑΕΖΔ di data area (fig. 20).

I dati essendo disposti conformemente all'enunciato, prolunghiamo le rette ΒΑ, ΓΔ sinchè si taglino in Η ed abbassiamo la perpendicolare ΗΚΘ. Essendo date le lunghezze ΒΓ, ΑΔ, è dato pure il loro rapporto, epperò anche il rapporto $\frac{\Theta H}{KH}$. Ma ΘΚ è dato. dunque ΚΗ lo è pure. D'altronde, poichè ΑΔ è dato, il triangolo ΑΔΗ lo è anche in grandezza, epperò altrettanto può ripetersi del triangolo ΕΖΗ; dunque è dato il rapporto di ΗΕΖ a ΗΑΔ, epperò quello di $\overline{H\Lambda}^2$ a $\overline{HK}^2$; ora ΗΚ ci è dato, dunque altrettanto può dirsi di $\overline{H\Lambda}^2$, epperò di ΗΛ. Ma ΗΚ è dato, dunque ΚΛ è pure dato e per conseguenza ΕΖ è dato di posizione (1).

(1) Vincent, op. cit., p. 283.

Senza riferire le soluzioni esposte da Erone per gli altri problemi, limitiamoci a rilevarne l'analogia con quelle tuttora adoperate e la differenza da queste prodotta dall'uso della simiglianza dei triangoli come surrogato all'impiego delle funzioni trigonometriche: va specialmente notata a questo proposito la soluzione del probl. XXVII.

Nei probl. XXIII-XXIV si è creduto ravvisare in germe il concetto di coordinate cartesiane (1), e in molti altri (p. es. in quello che porta il n. XVIII) si può notare l'applicazione della prerogativa di qualunque cono di essere segato in curve fra loro simili da piani paralleli. In un gran numero delle questioni trattate da Erone è indispensabile sapere calcolare l'area di un triangolo di cui si conoscano i lati; a questo problema è dedicato il § XXX, il quale forma l'aggiunta più importante che sia stata data agli elementi della geometria dai successori di Euclide; e se — come sembra — appartiene ad Erone, è il più cospicuo contributo che a lui deve la matematica pura. Coerentemente a siffatto modo di vedere, riportiamo la soluzione che di quella questione si legge nel *Traguardo;* essa è un modello di esattezza, eleganza e semplicità, onde direbbesi appartenere ad uno scrittore non molto lontano dal periodo aureo della geometria greca: se, dunque, è una produzione di Erone, sembra difficile ammettere che questi abbia vissuto molto dopo l'E. v.

Sia dato il triangolo ΑΒΓ (fig. 21ª) e sia dato ciascuno de' suoi lati; proponesi di trovarne l'area.

Si inscriva nel triangolo dato il cerchio ΔΕΖ, il cui centro sia Η. Conducansi le rette ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ, ΗΔ, ΗΕ, ΗΖ. Il prodotto ΒΓ per ΗΕ sarà il doppio del triangolo ΒΓΗ, mentre $ΑΒ \times ΗΖ$ sarà il doppio del triangolo ΑΒΗ e $ΑΓ \times ΗΔ$ il doppio del triangolo ΑΓΗ. Perciò il prodotto del contorno del triangolo ΑΒΓ per ΕΗ raggio del cerchio ΔΕΖ è eguale al doppio del triangolo ΑΒΓ. Si prolunghi ΓΒ e si faccia $ΒΘ = ΑΔ$. Sarà ΓΘ la metà del contorno del triangolo ΑΒΓ. Dunque l'area del medesimo è $ΓΘ \times ΗΕ = \sqrt{\overline{ΓΘ}^2 \cdot \overline{ΗΕ}^2}$. Si conduca ora ΗΚΛ perpendicolare a ΗΓ e ΒΛ perpendicolare a ΒΓ e si unisca Γ a Λ. Poichè i due angoli ΓΗΛ, ΓΒΛ sono retti, i punti Γ, Η, Β, Λ staranno sopra una medesima circonferenza e gli angoli ΓΗΒ, ΓΛΒ daranno in somma due retti. Per conseguenza, dal momento che le rette ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ bisecano i tre angoli formati attorno al punto Η (2), l'angolo ΑΗΔ sarà eguale all'an-

(1) Cantor, *Vorlesungen*, T. I; 1.ª ed., p. 323 e 2.ª ed., p. 357.

(2) Dai raggi del cerchio inscritto.

golo ΓΑΒ ed il triangolo ΗΑΔ risulterà simile al triangolo ΓΒΛ (1). Dunque sarà:

$$\mathrm{B\Gamma : B\Lambda = A\Delta : \Delta H = B\Theta : HE},$$

ed alternando

$$\mathrm{\Gamma B : B\Theta = B\Lambda : HE = BK : KE},$$

e componendo

$$\mathrm{\Gamma\Theta : B\Theta = EB : EK},$$

cosicchè è pure

$$\overline{\mathrm{\Gamma\Theta}}^2 : \mathrm{\Gamma\Theta \, . \, \Theta B = \Gamma E \, . \, EB : \Gamma E \, . \, EK = \Gamma E \, . \, EB} : \overline{\mathrm{HE}}^2$$

onde poi riesce

$$\mathrm{\Gamma\Theta \times B\Theta \times \Gamma E \times EB} = \overline{\mathrm{\Gamma\Theta}}^2 \, . \, \overline{\mathrm{HE}}^2 ,$$

la radice del qual ultimo prodotto è l'area del triangolo. E ciascuna delle quattro prime rette è data; imperocchè ΓΘ è la metà del contorno; ΒΘ è l'eccesso di questa metà sopra ΒΓ; ΓΕ è quanto la stessa supera ΑΒ; ed ΕΒ è il di più della stessa metà sopra il lato ΑΓ. Dunque l'area del triangolo è data (2).

67. Si ottiene così la notissima espressione dell'area di un triangolo che un tempo si collegava al nome di Tartaglia, che poi si giudicò per un prodotto indiano, e che ormai va ascritta fra le scoperte dei Greci. All'attribuzione di essa ad Erone stesso sembrano favorevoli altre investigazioni di natura esclusivamente teorica da questo compiute, la cui conoscenza dobbiamo ad informazioni concordanti pervenuteci da fonti differenti e di cui passiamo ora ad occuparci.

Nel *Commento* di Proclo agli *Elementi* di Euclide il nome di Erone s'incontra sei volte, e — come a ragione osserva il Martin (2) — tutto fa credere si tratti ivi di Erone d'Alessandria. Una citazione (*Proclo-Taylor,* I, p. 178) concerne la costruzione delle macchine, e non c'interessa. In un'altra (op. cit., II, p. 16) Proclo biasima Erone per avere (come vedemmo, L. I, n. 9) ridotti a tre gli assiomi posti da Euclide a base della geometria. Una terza volta (II, p. 102) egli fa allusione a certe obbiezioni mosse da " Erone il Meccanico „ all'enunciato del teorema " l'angolo esterno di un

(1) Al testo del *Traguardo* è stato qui arrecata una modificazione semplificatrice suggerita dal Venturi, confermata dal Vincent (op. cit. p. 288-9) ed approvata da F. Hultsch (*Der Heronische Lehrsatz über die Fläche des Dreiecks als Function der drei Seiten*, Zeitschr f. Math. u. Phys. T. IX, 1864, p. 235-6). La nuova dicitura è conforme ad un'altra redazione del ragionamento di Erone di cui parleremo fra poco (n. 72).

(2) Vincent, op. cit., p. 95-98.

triangolo è maggiore di ciascuno dei due interni ed opposti „. Più innanzi (II, p. 116) riporta la seguente dimostrazione " che appartiene ad Erone ed ai seguaci di Porfirio „ del teorema (*Elementi,* Lib. I, prop. 20) " la somma di due lati qualunque di un triangolo è maggiore del terzo lato „:

Sia $\alpha\beta\gamma$ il triangolo e si voglia dimostrare che $\alpha\beta + \alpha\gamma > \beta\gamma$. Si bisechi l'angolo α colla retta $\alpha\delta$. Essendo l'angolo $\alpha\delta\gamma$ esterno al triangolo $\alpha\beta\delta$, è maggiore dell'angolo interno $\beta\alpha\delta$. Ma l'angolo $\beta\alpha\delta$ è eguale a $\delta\alpha\gamma$. Quindi l'angolo $\alpha\delta\gamma$ è maggiore di $\delta\alpha\gamma$; epperò il lato $\alpha\gamma$ è maggiore di $\delta\gamma$. Per analoghe ragioni il lato $\beta\gamma$ è maggiore di $\beta\delta$. Onde i lati $\alpha\beta$ e $\alpha\gamma$ sono insieme maggiori di $\beta\gamma$, come erasi asserito.

Anche del teorema (*Elementi,* Lib. I, prop. 24) " se due triangoli hanno due lati dell'uno eguali a due dell'altro, ma i terzi lati diseguali, al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore „, Proclo (II, p. 138) riferisce una dimostrazione di Erone, la quale ha il vantaggio su quella di Euclide di evitare la riduzione all'assurdo. Finalmente, sopra certe aggiunte fatte dai " famigliari di Erone (e Pappo) „ alla dimostrazione di Euclide del teorema di Pitagora, Proclo ritiene (II, p. 206) compiere opera magnanima stendendo un velo di pietoso oblìo, per il fatto solo che esse, pur riferendosi ad un soggetto appartenente al I Libro, riposano sulle teorie che occupano il VI. Fortunatamente il segreto pedantescamente serbato da Proclo è rivelato da un manoscritto arabo della Biblioteca di Leida (1), — del quale abbiamo già fatto cenno (L. II, n. 8) — contenente il commento, fatto verso il 900 dell'E. v., da Abû 'l 'Abbâs al Fadl ben Hatim an Nairîzî (*vulgo* Anarizio), manoscritto di cui P. Tannery ha fatto conoscere alcuni estratti (2) e che attualmente si trova in corso di pubblicazione (3). Da questo codice si apprende che l'addizione ideata da Erone all'argomentazione euclidea consiste nell'osservare che tre certe rette, esistenti nella figura relativa, concorrono nel medesimo punto; da esso si ha poi la completa spiegazione del biasimo inflitta da Proclo, giacchè Erone fonda

(1) Warnerianus 399; n. 1068 nel Catalogo del 1716, nn. 965 e 988 nel Catalogo del 1845.

(2) *La géométrie grecque*, I Partie (Paris. 1887) Chap. XIII.

(3) *Codex Leidensis* 399-1, *Arabice et Latine ediderunt R. O. Besthorn et J. L. Heiberg* (Hauniae, 1897).

il suo ragionamento sui tre lemmi seguenti, per stabilire i quali sono realmente necessarie le teorie delle proporzioni e della similitudine:

1. e 2. Se in un triangolo ABC si conduce DE parallela alla base BC a segare in D, E i lati AB, AC od i loro prolungamenti, e se si prende il punto medio F del segmento DE, unendo F a A si otterrà una retta che taglierà il lato BC nel suo punto di mezzo G.

3. (Prop reciproca della 43 e del I Lib. degli *Elementi*). Se (fig. 22) un parallelogramma AB è diviso mediante due parallele ai lati in quattro altri $ADGE$, DF, $FGCB$, CE in modo che DF, CE siano fra loro equivalenti, il vertice G ad essi comune si troverà sulla diagonale AB.

Premessi questi due lemmi teorematici, ecco come procede il nostro autore:

Sia (fig. 23) ABC un triangolo rettangolo in A. Costruiamo sopra BC il quadrato CD, su AB il quadrato $ABEF$ e su AC il quadrato $ACGH$. Conduciamo per A la retta AKL perpendicolare a BC, uniamo E a C; la congiungente taglia AL in M; conduciamo quindi MB e MG; dico che queste due rette si trovano una sul prolungamento dell'altra. Per dimostrarlo prolunghiamo EB, CG finchè s'incontrino in N, e le loro parallele EF, GH finchè s'incontrino in O. Conduciamo per M la PMQ parallela a EO e la SMR parallela a FC; ed uniamo O ad A e F ad H. Essendo $AH = AC$, $FA = AB$ e ang. $FAH =$ ang. BAC, i triangoli AFH, ABC sono fra loro eguali; quindi $BC = FH$ e ang. $ABC =$ ang. AFH. Ma essendo AK perpendicolare alla base del triangolo rettangolo ABC, sono eguali gli angoli ABC e CAK; e d'altronde, le diagonali AO, FH segandosi in Y e FY essendo eguale a YA, sarà ang. $HFA =$ ang. OAF. Dunque ang. $OAF =$ ang. CAK. Aggiungiamo ai due membri ang. OAC; avremo ang. $OAC +$ ang. $OAF =$ ang. $MAC +$ ang. CAO. Ma la prima somma è due retti, dunque lo stesso può dirsi della seconda, epperò OAM è una retta. Essa è diagonale del parallelogramma OM; quindi, per la prop. I. 43 (degli *Elementi*), le aree AS e AQ sono eguali. Aggiungiamo ai due membri l'area AM, ed otterremo le due aree eguali MH, MF. Ma nel parallelogrammo FN tagliato dalla diagonale EMC sono eguali le aree MF, MN. Risultano dunque eguali anche MH e MN. Perciò, in forza del terzo lemma, BM e MG sono in una retta.

68. È superfluo insistere sull'importanza che ha questo squarcio, vuoi per la notevole verità che contiene, vuoi pel rigore con cui è assodata. È invece opportuno rilevare come le osservazioni riferite da Proclo, e quelle ancor più numerose sparse nel suindicato manoscritto di Leida, facciano naturalmente congetturare che Erone abbia composto un commento agli *Elementi* di Euclide. È questa una ipotesi, che fu un tempo combattuta da M. Cantor e P. Tannery, ma che i nuovi documenti scoperti in questi ultimi tempi rendono

ogni giorno più verosimile (1): noi la riteniamo come una delle meno incerte fra quelle concernenti Erone, ma lasciamo, ben inteso, indeterminata la forma precisa del lavoro supposto, affidando cioè all'avvenire il decidere se questo fosse un vero e proprio commento, o non piuttosto una serie di osservazioni, emendamenti ed aggiunte al trattato di Euclide.

Riguardo all'estensione ed al contenuto di questa presunta opera geometrica di Erone, ulteriori ed ampie notizie si traggono da un altro importante manoscritto rinvenuto nel 1896 da M. Curtze nella Biblioteca universitaria di Cracovia, in cui si trova, tra l'altro, la traduzione in latino, compiuta nel Sec. XII da Gherardo da Cremona, del succitato commento dell'Arabo Anarizio. Questo commento — di cui il Curtze stesso ha curata la stampa (2) — è meno opera originale, che una sintesi delle osservazioni sugli *Elementi* dovute a Simplicio, Gemino ed Erone (3) e venne intercalato nella prima versione araba di Euclide (dovuta a Alhadschdschadsch ben Jûsuf ben Mathar). In esso commento il nome di Erone ricorre assai spesso nei primi quattro libri, mai nel quinto ed una sola volta in ciascuno dei tre seguenti; significa ciò che a questi libri degli *Elementi* siasi limitato il geodeta di cui ci occupiamo?... Nulla autorizza ad affermarlo.

Da quanto dice Anarizio risulta che, nel chiosare Euclide, Erone si è permesso di suggerire qua e là degli spostamenti nell'ordine dei teoremi, nè ha mancato di notare (4) il nèo (v. L. II, n. 12) che esiste nella proposizione in cui Euclide, in principio del III Libro, stabilisce la nozione di circoli eguali. Anche nella nomenclatura euclidea sembra avere egli introdotte delle modificazioni, giacchè nella traduzione di Gherardo troviamo (5) i vocaboli *compositio* e *dissolutio*

---

(1) Oltre il Tannery, anche il Cantor (*Vorlesungen*, II Aufl. T. I, p. 354) finì per accettarla.

(2) *Euclidis Opera omnia ed. Heiberg et Menge supplementum. Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii*, ed M. Curtze (Lipsiae, 1899).

(3) Questi nomi sono spesso alterati in Sanbelichus, Aganis, Yrinus; come Archimede divenne Asamithes o Asimites; a chi poi appartengono i nomi Heromides, Herundes, Aposedanius, Diochasimus e St' ius, è ignoto. Storpiature analoghe sono frequentissime in opere provenienti dagli Arabi; cfr. Cantor, *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed.) p. 663.

(4) *Anarizio ed. Curtze*, p. 111.

(5) Op. cit., p. 89.

per indicare due operazioni, inverse l'una dell'altra, che sono in sostanza quelle che noi eseguiamo nell'algebra quando surroghiamo mediante l'identità $a(b + c + d + ...) = ab + ac + ad + ...$ il secondo membro col primo od inversamente il primo col secondo. Aggiungasi che, oltre al munire di analisi di alcuni problemi attinenti a' poligoni inscritti e circoscritti al circolo, che Euclide trattò col metodo sintetico da lui preferito, Erone ha ideati dei procedimenti originali per risolvere certe questioni geometriche esistenti negli *Elementi* o da questi ispirate; i relativi passi del commento in esame sono quelli che, assieme ad altri riferiti prima, lo adornano di un valore permanente e lo elevano ben al disopra di quelli di cui ci occuperemo nel Libro successivo. Su questi passi lo storico della geometria greca non può non arrestarsi.

69. È noto che Euclide ha cominciato i suoi *Elementi* insegnando a costruire un triangolo equilatero di dato lato. Erone aggiunge (1) l'analoga costruzione di un triangolo isoscele avente i lati doppî della base; essa venne riferita da Proclo *senza citarne la provenienza* e risulta dalla fig. 24ª, anche non accompagnata da alcuna dilucidazione.

Nella prop. I, 11 Euclide ha insegnato a condurre da un punto di una retta la perpendicolare alla retta stessa; Erone aggiunge (2) la seguente costruzione relativa al caso in cui il punto stia all'estremo della retta: si scelga (fig. 25) ad arbitrio sulla retta data $\alpha\beta$ un punto γ e si elevi da esso la retta $\gamma\delta$ perpendicolare a $\alpha\beta$ ed eguale a $\alpha\gamma$; si conduca $\delta\varepsilon$ perpendicolare a $\gamma\delta$ e se ne determini la intersezione ε con la bisettrice dell'angolo $\alpha\gamma\delta$; $\varepsilon\alpha$ sarà la retta domandata.

Del teor. I, 19 degli *Elementi* Erone dà una dimostrazione (3) che Proclo ha trascritto *senza confessarne la derivazione;* del seguente si trova (4), come produzione eroniana, quel ragionamento che Proclo — lo dicemmo già nel n. 67 — attribuisce eziandio ai seguaci di Porfirio; anche del teorema I, 37 Anarizio riporta (5) una dimostrazione di Erone. Maggiore importanza possiede il metodo per

(1) Id. p. 43.
(2) Id. p. 54.
(3) Id. p. 56.
(4) Id. p. 58.
(5) Id. p. 75.

eseguire la divisione di una retta in tre o più parti eguali che Erone fa conoscere (1) in seguito alla Prop. I, 31 di Euclide; ecco in che cosa esso consiste:

Se (fig. 26) $\alpha\beta$ è la retta data, si conducano ad essa ne'suoi estremi le perpendicolari $\alpha\gamma$ e $\beta\delta$ fra loro eguali, e si dividano per metà in ε, θ; le rette $\gamma\theta$ e $\delta\varepsilon$ segheranno $\alpha\beta$ nei punti ζ e η si avrà $\alpha\eta = \eta\zeta = \zeta\beta$. " Et secundum hanc viam dividemus, in quot sectiones voluimus usque in infinitum „. Questa costruzione, che si ritrova in Abûl Wafâ, è eseguibile con una sola apertura di compasso, donde il Curtze (2) trasse un argomento per ritenere non essere rimasta ignota ai Greci la geometria fondata sull' uso esclusivo di un compasso a gambe fisse.

Sopra le aggiunte al teorema di Pitagora (3) riferimmo nel n. prec.; quì notiamo la dimostrazione del teorema inverso (4), e rileveremmo anche le verificazioni numeriche pei teoremi di algebra geometrica del II Libro degli *Elementi*, ove fossero esplicitamente dichiarate come fatica eroniana.

Passando ora alla parte del commento relativa al III Libro, notiamo l' importante proposizione (dimostrata per assurdo) " una retta non può segare un circolo in più di due punti „ che Erone molto giudiziosamente unì (5) a quella (III, 12) di Euclide " un circolo non può toccare un circolo in più di un punto „. Similmente alla Proposizione (III, 16) ove Euclide insegna a condurre ad un circolo la tangente da un punto esterno, il nostro autore aggiunse che " per un punto esterno ad una circonferenza passano due rette fra loro eguali ad essa tangenti „. Perciò ad Erone debbono farsi risalire le due proposizioni fra loro correlative che dicono essere la circonferenza una curva di secondo ordine e seconda classe.

Nel commento al Libro IV, Anarizio riferisce (6) come appartenente ad Erone la seguente fondamentale proposizione (7): " Nel-

(1) Id. p. 73.
(2) Id. p. 75 nota.
(3) Id. p. 78-84.
(4) Id. p. 86.
(5) Id. p. 122.
(6) Id. p. 152.
(7) Di essa vedemmo (L. II, n. 13) esistere delle tracce in Euclide stesso; ciò non toglie ad Erone il merito di averla concepita completamente, enunciata in generale e dimostrata con rigore.

l' interno di qualsivoglia rettilinea figura avente lati ed angoli eguali, esiste un punto le cui congiungenti coi vertici della figura sono fra loro eguali; tal punto è il centro della figura, nonchè dei cerchi in essa inscritto e circoscritto „. Come chiusa della dimostrazione viene riferito, attribuendolo ad Euclide, il seguente teorema: " Nelle figure (sottinteso " regolari „) di un numero dispari di lati, le rette che bisecano gli angoli sono perpendicolari ai lati „. Da quale opera sia estratto, il commentatore non dice, nè noi siamo in grado di sopperire al suo silenzio.

70. Qui ci arrestiamo nel nostro resoconto di quanto ha fatto Erone come commentatore, giacchè il sin quì detto è sufficiente a farne misurare il valore. E prima di abbandonare la geometria elementare nelle sue relazioni con il meccanico d'Alessandria, vogliamo dir qualchecosa di una collezione di *Definizioni dei termini geometrici* che, per lungo volgere di secoli, venne a lui attribuita (1): ben è vero che il Friedlein (2) ed il Tannery (3) giudicarono illegittima tale attribuzione, ma in questi ultimi tempi vennero addotti da W. Schmidt degli argomenti in favore dell'antica opinione (4). Per tale ragione e più ancora perchè quelle *Definizioni* costituiscono un documento citato spessissimo è bene dirne qualche cosa.

Eccone anzitutto l'esordio:

Ora, illustrissimo Dionigi, volendo schizzare per te e porre sotto i tuoi occhi, il più brevemente possibile, i preliminari degli elementi della geometria, sin dal principio e da un capo all'altro di questo trattato mi conformerò agli insegnamenti geometrici di Euclide, autore degli *Elementi;* giacchè io penso che, così facendo, ti

(1) L'« editio princeps » è contenuta nel volume *Oratio Conradi Dasypodii de disciplinis mathematicis* (Argentorati, 1579).

(2) *De Heronis quae feruntur definitionibus* (Bull. di Bibl. e Storia ecc., T. IV, 1871, p. 93-121); v. anche Boncompagni, *Intorno alle definizioni di Erone Alessandrino* (Ivi, p. 122-126 e 512).

(3) *La géométrie grecque*, I Partie, p. 177-181; *L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (Mém. de Bordeaux, 2.e Série, T. IV, p. 162-4); *La stéréométrie d' Héron d'Alexandrie*, (Id. T. V, p. 305-6). Il Tannery, nel primo dei cit. luoghi, esprime l'opinione che la sostanza delle *Definizioni* risalga al I Sec. dell' E. v.; ma che esse, nella forma attuale, si trovassero incorporate in certi *Prolegomeni*, redatti non prima del III Sec. dell' E. v., donde poi passarono in altra compilazione fatta da Anatolio d'Alessandria, che — sotto Aureliano (214-275) — fu vescovo di Laodicea in Siria; la fonte prima sarebbe, non Erone, ma Gemino.

(4) *Heronis Alexandrini Opera*, T. I (Lipsiae, 1899), p. XV.

metterò in grado di abbracciare con facilità l'insieme e di afferrare il legame, non soltanto delle opere di questo autore, ma della miglior parte delle opere di geometria. Comincerò dal punto.

Ed infatti vengono successivamente definiti il *punto,* la *linea* (lunghezza senza larghezza o *quid* che separa la luce dall'ombra), la *linea retta,* le *linee circolari,* e le *curve,* fra le quali l'autore considera specialmente l'*elica* (di cui espone la definizione sotto due forme). Passa poi alle *superficie* in generale, che l'autore distingue in *piane* e *non piane,* e finalmente ai *solidi,* caratterizzati come figure aventi lunghezza, larghezza ed altezza. Definiti gli *angoli,* ne vengono indicate le varie classificazioni: angoli piani ed angoli solidi, angoli rettilinei ed angoli non rettilinei, angoli retti, acuti ed ottusi (1). Si trova poi la nozione generale di *figure* e dei loro confini, seguita dalla loro classificazione: figure piane e figure solide, figure non composte e figure composte (lunule, corone). Dopo il circolo, il suo diametro ed il semicerchio, incontriamo l' ἀψίς — figura minore del semicircolo, compresa tra una retta inferiore al diametro ed il più piccolo degli archi sottesi — e il segmento circolare qualunque. Al concetto di angolo inscritto in un segmento, tien dietro quello di settore e (dopo l'osservazione che una circonferenza è concava rispetto ad un qualunque punto interno e convessa rispetto ad uno esterno) quelli di lunula (area limitata di due archi circolari concavi dalla medesima parte), di corona, di bipenne (πέλυξ, figura contornata da quattro archi, due concavi e due convessi). Si ritorna poi alle figure rettilinee, per distribuirle in tre categorie: *triangoli, quadrilateri* e *multilateri.* I primi vengono distinti in equilateri, isosceli, e scaleni, e viene osservato che i primi sono sempre acutangoli, mentre gli altri possono essere rettangoli, acutangoli od ottusangoli. Invece dei quadrilateri, alcuni sono equilateri, altri non, alcuni rettangoli, altri non, quelli soltanto equilateri diconsi *rombi,* mentre se sono anche rettangoli si chiamano quadrati; altre specie di quadrilateri sono: il parallelogramma ed il rettangolo, il trapezio (2) (isoscele o scaleno) ed il trapezoide. — In ogni figura l'autore delle *Definizioni* consi-

(1) L'autore rileva che tutti gli angoli retti sono eguali fra loro, mentre esistono infinite specie di angoli acuti ed ottusi.

(2) Cfr. Weissenborn, *Das Trapez bei Euklid. Heron und Brahmegupta* (Abh. zur Gesch. der Math., II Heft, 1879, p. 167-184).

dera base, lati e diagonali; quindi chiarisce che cosa intendasi per κάθετος, per rette παράλληλοι e οὐ παράλληλοι, e per altezza di un triangolo; e finisce riferendo il teorema pitagorico (v. L. I, n. 22) che afferma essere il triangolo equilatero, il quadrato e l' esagono regolare gli unici poligoni capaci di riempire un piano.

Il nostro compilatore dice poi che, secondo alcuni, le figure solide si dividono in non-composte e composte, secondo altri, in semplici (come la sfera ed il piano) e miste (ad esempio i coni ed i cilindri). Analoga distinzione può farsi relativamente alle linee tracciate su di una superficie; così, sono semplici la retta e la circonferenza, miste le coniche e la spiriche (σπειρικαί; cfr. L. II, n. 74). Fra le figure solide emerge la sfera, in cui va notato non solo il centro ed il diametro, ma anche l' asse ed i poli (cfr. il II Cap. del presente libro); ogni sezione piana di una sfera è un circolo; circolo e sfera godono della proprietà di avere il contenuto massimo a parità di contorno (cfr. L. II, n. 75).

Dopo la sfera, s' incontra il cono, figura in cui esiste una base, un vertice ed un asse; l'autore classifica i coni e le loro sezioni piane. Quindi si occupa del cilindro e della spira (cfr. L. II, n. 74), per volgersi alla classificazione dei solidi contornati da linee rette, distinguendone le seguenti specie: cubi (κύβοι), poliedri, prismi, travicelli (δοκίδες), quadrelli (πλινθίδες), (1) e cunei (σφηνίσκοι). La piramide regolare si chiama anche tetraedro ed il cubo esaedro; si sogliono poi anche considerare l' ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro, che, assieme ai due precedenti formano i cinque Πλάτωνος σχήματα mentre esistono altri tredici poliedri chiamati, dal nome del loro inventore Ἀρχιμήδους σχήματα (cfr. L. II, n. 46).

Anche nello spazio si può considerare il κάθετος di una figura; e, sia nel piano che nello spazio, esistono figure eguali e figure simili fra loro.

Si trovano finalmente delle definizioni concernenti le grandezze e le loro parti, i loro rapporti e le proporzioni che formano, nonchè i numeri razionali ed irrazionali, commensurabili ed incommensurabili (2). Poi l' autore scende dall' astratto al concreto definendo le unità

---

(1) Cfr. *Teone Smirneo ed. Dupuis*, p. 70. Cfr. anche L. V, n. 32.

(2) Ivi è citato un commento aritmetico dello scrittore (τὰ πρὸ τῆς ἀριθμητικῆς στοιχειώσεως).

di misura in uso. In tale enumerazione non lo seguiremo, anzi abbandoneremo le *Definizioni*, dopo di avere però notato che, se il lettore ricorrerà all'originale di queste, riscontrerà in esso tali inesattezze e tanti errori, che (ricordando quanto esponemmo nei nn. precedenti) capirà il giudizio pronunciato dal Friedlein colle parole: " haec intuens Heronem illum clarum geometriae et mechanicae artis peritissimum auctorem esse huius libelli persuadere mihi nequo ".

71. Ciò che rimane delle altre opere di Erone può dividersi in cinque sezioni, intitolate risp.: 1. Geometria, 2. Introductio stereometricorum, 3. Stereometricorum collectio altera, 4. Mensurae, 5. Liber geeponicus (1). Lo studio di questi scritti venne cominciato e spinto anzi avanti dal Martin, proseguito da M. Cantor (2) e si può dire completato da P. Tannery (3). Se, a differenza di quanto facemmo nei casi analoghi, noi non riassumiamo le conclusioni a cui questi geniali investigatori pervennero, gli è che dell' opera Μετρικά — di cui il Martin, con estrema sagacia, riuscì a trovare le tracce e ricostruire il piano — venne recentemente scoperto da R. Schöne il manoscritto nella biblioteca del Serraglio a Costantinopoli, onde tra poco tutti saranno in grado di pronunciare su quell'opera un giudizio esente da qualunque elemento ipotetico. Essa è destinata a formare il nucleo dell' edizione completa di Erone che già abbiamo avuto occasione di citare. E poichè chi scrive ebbe la fortuna, (per l'estrema cortesia del sig. H. Schöne, che sopraintende alla pubblicazione dei Μετρικά) di esaminare il principio del I dei tre libri in cui è ripartita l' opera in questione, crede bene dirne quì qualche cosa, riserbandosi di ritornare, se sarà del caso, sull'argomento dopo che la progettata edizione sarà completa.

Il I libro dei Μετρικά è dedicato alla misura delle superficie e comincia col seguente proemio:

---

(1) Il tutto venne pubblicato da F. Hultsch sotto il titolo *Heronis Alexandrini Geometricorum et Stereometricorum Reliquiae* (Berolini, 1864).

(2) Oltre alle *Vorlesungen*, si vegga il lavoro *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmessungkunst* (Leipzig, 1875).

(3) *L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (Mém. de Bordeaux, II Série, T. IV, 1882); *La stéréometrie d' Héron d' Alexandrie* (Id. T. V, 1884); *Études héroniennes* (Ivi); *Questions heroniennes* (Bull. des Sec. math. II Série, T. VIII, 1884).

Nelle sue origini la geometria si occupava, come ci apprende un'antica storia, della misura e della divisione delle terre, e appunto da ciò ebbe origine il nome geometria. Ma, essendo ciò utile agli uomini, il concetto di essa venne ampliato, cosicchè la trattazione delle misure progredì ai corpi solidi, e siccome le proposizioni trovate da principio non bastavano a ciò, così quelle divisioni richiesero ulteriori indagini, tanto che oggi stesso molto resta ancora da trovarsi, quantunque Archimede ed Eudosso abbiano trattato eccellentemente tale soggetto. Giacchè innanzi alla scoperta di Eudosso, era impossibile dimostrare che il cilindro è triplo del cono di egual base ed eguale altezza e che i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri. E prima della acuta scoperta di Archimede sembrava improbabile si arrivasse a pensare che la superficie della sfera fosse il quadruplo dell'area di un circolo massimo e che il suo volume fosse due terzi del volume del cilindro circoscritto e che ci fossero ancora altre proposizioni dello stesso genere. Ora poichè il detto studio è indispensabile, così noi ritenemmo opportuno di raccogliere tutto quello che i nostri predecessori scrissero e che noi stessi abbiamo poi trovato.

Cominceremo dalla misura delle aree piane, aggiungendo poi alle superficie piane le altre, convesse o concave, dal momento che il concetto di superficie non esige che due dimensioni. Le dette superficie devono essere paragonate ad una superficie a lati rettilinei e ad angoli retti, a lati rettilinei perchè le rette, a differenza delle altre linee, sono sovrapponibili a sè stesse (giacchè ogni retta è sovrapponibile ad altra retta, mentre le altre linee, concave o convesse, non si possono tutte sovrapporre le une alle altre). Quindi il paragone si fa con qualche cosa d'invariabile, cioè con la retta, ed inoltre anche coll'angolo retto. Giacchè ancora ogni angolo retto è sovrapponibile a qualunque altro angolo retto, mentre i rimanenti non lo sono a tutti gli altri. Ora si parla di un cubito quadrato quando si ha un quadrato avente per lato un cubito, e similmente di un piede quadrato, quando si ha un quadrato avente per lato un piede, dimodochè le dette superficie vengono paragonate a tali porzioni di superficie od a parti delle medesime. I solidi a lor volta vengono paragonati ad un corpo fisso che ha gli spigoli rettilinei e gli angoli retti e che ha tutte le costole fra loro eguali — è un cubo, di cui ogni spigolo è un cubito od un piede —, oppure alle parti di questo cubo. Per quali ragioni poi il paragone venga fatto con le dette porzioni di spazio, è detto, ma in seguito noi cominceremo con la misura delle superficie. Per non avere bisogno di nominare per ciascuna misura piedi o cubiti o loro frazioni, presenteremo i dati in unità, potendosi così intendere qualunque unità di misura.

72. Il tono in cui è scritta questa prefazione ricorda lo stile del proemio al *Traguardo* e conferma le induzioni che noi abbiamo tratte da questo (n. 65) relativamente alla fisonomia generale di Erone; egli appare non come un Newton creatore del calcolo infinitesimale, ma piuttosto come un Eulero che ne riordina, completandole e perfezionandole, le dottrine fondamentali. E che egli avesse un sano criterio nel distribuire la materia si vede esaminando i primi problemi che egli risolve, i quali trattano della misura delle aree di un rettangolo, di un triangolo rettangolo o di un triangolo iso-

scele (1). Nota poi Erone che, in un triangolo ΑΒΓ, l' angolo A è acuto, retto od ottuso secondochè $\overline{B\Gamma}^2 \lesseqgtr \overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2$ — osservazione di data antichissima (L. I, n. 46), benchè Euclide non l'abbia introdotta negli *Elementi* — e quindi calcola l'area di un triangolo acutangolo od ottusangolo, di cui si conoscano i lati, trovandone prima una delle altezze. Dopo avere osservato che l' area di un rettangolo, del quale due lati contigui hanno lunghezza espressa da AB, ΑΓ, può rappresentarsi con $\sqrt{\overline{AB}^2 . \overline{A\Gamma}^2}$, Erone riproduce il ragionamento esposto nel *Traguardo* (v. n. 66) per calcolare l'area di un triangolo di cui si conoscono i lati. E quindi determina l'area di un trapezio rettangolo e di un trapezio isoscele; quello trasforma in un rettangolo abbassando dal punto medio del lato obliquo alle basi la perpendicolare alle stesse, questo decompone in un triangolo isoscele ed un parallelogramma, conducendo da un estremo della base minore la parallela a quello dei lati obliqui che non passa per quell' estremo.

La via seguita in ogni caso da Erone è piana e atta a soddisfare le più raffinate esigenze di rigore scientifico. Il suo stile è degno di subire il paragone con quello di Euclide e de' suoi contemporanei. Ne differisce per la parte importante che è assegnata ai numeri; chè ogni problema viene trattato supponendo che i dati abbiano valori numerici (però con metodo applicabile in generale) ed è nettamente distinto il caso in cui la soluzione sia razionale; anzi Erone dà prove di vaste cognizioni aritmetiche assegnando i dati in modo da non imbattersi in numeri incommensurabili. Per porgere al lettore un' idea della forma di cui riveste quanto espone, nulla di meglio che riferire una delle questioni da lui trattate:

Sia ΑΒΓ un triangolo acutangolo in cui $AB = 13$, $B\Gamma = 14$, $A\Gamma = 15$ Trovarne l'area. Da ciò che precede risulta ad evidenza che l'angolo in A è acuto. Infatti $\overline{B\Gamma}^2$ è minore di $\overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2$. Si abbassi ΑΔ perpendicolare a ΒΓ. Sarà quindi: $\overline{A\Gamma}^2 + 2\, B\Gamma \times B\Delta = \overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2$ come < ... > (2) è dimostrato. Ora è $\overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2 = 365$

(1) L'area del rettangolo viene trovata decomponendolo in tanti quadrati aventi per lati l'unità di misura; quella del triangolo rettangolo considerando questo come ottenuto dividendo un rettangolo mediante una diagonale; e quello del triangolo isoscele non rettangolo immaginandolo ottenuto congiungendo il punto medio di un lato di un rettangolo agli estremi del lato opposto.

(2) Lacuna nel ms.

e $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 = 225$. Quindi $2\ \mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{B\Delta} = 140$, e $\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{B\Delta} = 70$. Ma $\mathrm{B\Gamma} = 14$, dunque $\mathrm{B\Delta} = 5$. Ed essendo $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{A\Delta}}^2 + \overline{\mathrm{\Delta B}}^2$, $\overline{\mathrm{AB}}^2 = 169$, $\overline{\mathrm{B\Delta}}^2 = 25$, sarà $\overline{\mathrm{A\Delta}}^2 = 144$. Sarà perciò $\mathrm{A\Delta} = 12$. Ma $\mathrm{B\Gamma} = 14$. Quindi $\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{A\Delta} = 168$. In conseguenza sarà il triangolo $\mathrm{AB\Gamma} = 84$. Il modo di procedere è il seguente:

$$13^2 = 165$$
$$14^2 = 196$$
$$15^2 = 225$$
$$169 + 196 - 225 = 140$$
$$\frac{140}{2} = 70$$
$$70 : 14 = 5$$
$$13^2 = 169$$
$$169 - 5^2 = 144$$
$$\sqrt{144} = 12.$$

Questa è la lunghezza della perpendicolare. Moltiplicandola per 14 si ha 168 la cui metà è 84. Tale è l'area cercata.

Se, come è presumibile, il resto dei Μετρικά corrisponde al principio, noi ci troveremmo in presenza di un' opera che, benchè scritta nell' intento di soddisfare i bisogni della pratica, è redatta col metodo più soddisfacente; i procedimenti erronei che in certi manoscritti di essa si trovano sembrano pertanto opera posteriore di qualche ignorante, che credette preferibili le regole imperfette degli Egiziani imitatori di Ahmes ai canoni matematicamente esatti dei Greci discepoli di Euclide. Onde resta confermata l' idea che dinnanzi ad Erone ci troviamo in presenza di una personalità di primo ordine; e se nuovi documenti non verranno a cambiare i dati della questione, si potrà e, dovrà ritenere che egli abbia esercitato per la Geometria pratica (1) un'azione comparabile a quella di Euclide e Tolomeo, quello per la Geometria teorica e questo per l' Astronomia.

---

(1) Adopero questa dicitura come corrispondente al vocabolo *Mensuration* degli Inglesi; ricordo poi (v. L. II n. 22, in nota) che tale diramazione della geometria venne esclusa completamente dagli *Elementi*.

VI.

I Geodeti minori.

Un geodeta bizantino (Erone il Giovane?).

73. La storia della Geodesia greca dopo Erone non è meno incompleta di quanto sia la storia delle opere di coloro che spianarono il terreno e prepararono i materiali per la cospicua costruzione di cui egli fu l'architetto. Esiste però e venne pubblicato dal Vincent un trattato di Geometria pratica scritto da uno, il cui nome non è conosciuto con certezza, e che da taluno vien chiamato Erone il Giovane, od anche (per distinguerlo dai due Eroni d'Alessandria; v. n. 64) Erone III; ma per attribuirgli il nome di Erone, non vi è (checchè ne pensi il Martin) alcuna ragione seria (1). Sull'epoca al quale appartiene l'autore di quel trattato le opinioni erano un tempo estremamente discordi; chè, mentre il Letronne lo faceva vivere circa nel 623 dell'E. v., l'Ideler lo riteneva non anteriore al Sec. X. Ma il Martin, con non comune abilità, riuscì a dedurre, dallo studio di quel trattato, che esso deve essere stato redatto intorno al 938 dell'E. v. (2) in Costantinopoli (3). Il trattato stesso ha comune col *Traguardo* di Erone lo scopo e presenta col medesimo tante importanti coincidenze da potersi dire una pedissequa imitazione di questo.

---

(1) « Les manuscrits aujourd'hui subsistant de cet ouvrage sont inscrits, cela est vrai, sous le nom d'Héron; mais supposons, pour un instant, que l'auteur ait omis, ce qui n'est nullement impossible, de signer sa rédaction autographe, soit par humilité chrétienne (car il était chrétien), soit pour tout autre motif; supposons que son nom se soit trouvé effacé ou perdu, comme le sont les premiers chapitres de la géodésie: ne suffisait-il point que l'objet de l'ouvrage fût le même que celui du *Traité de la dioptre*, dont il présente jusqu'à un certain point une sorte de commentaire et d'application? Ne suffisait-il point que Héron y fût invoqué comme en ayant fourni le thème, pour que dans l'impossibilité de le désigner positivement, on n'ait trouvé rien de mieux, rien autre chose à faire, que de le rapporter à Héron, dont il continuait la doctrine, et d'y appliquer le nom de ce géomètre, non pas comme désignation de l'auteur, mais comme personnification de la doctrine? » Vincent, *Extraits et Extraits* etc., p. 167-8.

(2) Martin, *Recherches* etc., p. 275-7.

(3) Id. p. 304, 307 e 313.

Il suo valore, dal punto di vista matematico, è pressochè nullo; rileveremo in esso soltanto il passo seguente, perchè mostra che all'autore sembrava evidente essere eguale a quattro retti la somma degli angoli di qualunque quadrilatero ed essere sempre la stessa la somma degli angoli di tutti i triangoli immaginabili.

Quanto poi a che qualunque triangolo suscettibile di essere concepito dallo spirito, o di cadere sotto i sensi, abbia i suoi tre angoli eguali a due retti, si può concluderlo da questo che ogni quadrilatero ha i suoi angoli eguali a quattro retti, e che si può, mediante una diagonale, dividerlo in due triangoli aventi sei angoli, ora retti, ora acuti od ottusi più o meno; e poichè questi sei angoli dànno una somma eguale a quattro retti, ne segue appunto che ciascuno dei due triangoli componenti il quadrilatero ha i suoi angoli eguali a due retti; e lo stesso succede per qualsia triangolo cade sotto i sensi o sia concepibile dall'immaginazione.

Le mende di questa pseudo-argomentazione mostrano ad evidenza che Erone il Giovane apparteneva ad un'epoca di grande decadenza delle scienze esatte.

Quanto alla materia trattata dal geodeta bizantino, notisi che i problemi 1-4 concernono la determinazione della distanza fra due punti non entrambi accessibili, i due seguenti poligoni e cerchî (4), i problemi 7-8 volumi e baricentri, il 9 coincide con quello risolto nel § XXXI del *Traguardo* e l'ultimo si riferisce a distanze angolari (misurazioni celesti). Le soluzioni di tali questioni sono, per la maggior parte, tratte da Erone. Quelle però relative ad aree e volumi non hanno i loro corrispondenti nel *Traguardo;* per trattarne alcune l'autore si giova dei teoremi *Su la sfera ed il cilindro* di Archimede.

Cominciamo — egli scrive — dalla misura della figura cubica, essendo quella in cui tutte le dimensioni sono fra loro eguali. Infatti il cubo è una figura solida compresa fra 6 quadrati eguali; ha 12 spigoli, 8 angoli retti, e 6 facce piane, non formanti che tre dimensioni fra loro eguali; il che fece sì che i Pitagorici, volendo dimostrare sopra questa figura i rapporti armonici e divini della consonanza, danno al cubo il nome di *armonia*.

Passa poi al paragone fra i volumi del cubo, del cilindro inscritto e della sfera inscritta e finalmente alla misura del cono retto (citando Euclide), e di altri solidi, fra cui certuni di cui riscontrammo l'esistenza (v. n. 70) nella raccolta di *Definizioni dei termini della geometria*.

---

(1) Si assume ivi $\pi = 3\,{}^1/_7$ citando Archimede.

Sesto Giulio Africano.

74. L'intervento nella questione eroniana del mediocre geodeta a cui è consacrato il n. prec. ci ha indotto a violare l'ordine cronologico ed a parlarne prima di occuparci di Sesto Giulio Africano, il quale nacque in Emaus (1), visse sotto il regno di Alessandro Severo (220-230) e scrisse una monografia intitolata Κεστοί (2), grazie alla quale il suo nome ottenne un posto nella storia della matematica greca. E precisamente è ad un passo (cap. XXXI (3)) di tal opera, concernente la Geometria pratica, che egli è debitore di siffatto onore. Il problema che egli ivi si propone è di determinare la larghezza di un fiume o l'altezza di un muro, e lo risolve in due modi.

Nel primo egli si fonda sul seguente lemma: " se pel punto di mezzo di un cateto di un triangolo rettangolo si guida la perpendicolare a questo cateto e pel punto in cui essa incontra l'ipotenusa si conduce la parallela al cateto stesso, tutti i lati del triangolo risulteranno divisi per metà ". L'uso ne è ovvio: Sia (fig. 27ª) α un punto della riva del fiume più lontano dall'osservatore (riva nemica), φ un punto dell'altra riva tale che $\alpha\varphi$ misuri la minima distanza di α da questa riva, e ι un punto della retta $\alpha\varphi$ che sia lontano da φ più di quanto φ disti da α; si prenda ad arbitrio un punto υ della perpendicolare condotta dal punto ι alla $\alpha\iota$ e si conduce $\alpha\upsilon$; finalmente si bisechi $\iota\upsilon$ in $\varkappa$, si tiri $\varkappa\theta$ perpendicolare a $\iota\upsilon$ e $\theta\rho$ perpendicolare a $\iota\alpha$. Essendo, per il lemma precedente, $\alpha\rho = \rho\iota$ sarà la larghezza cercata eguale alla differenza fra $\varphi\iota$ e $\varphi\rho$. — Similmente si procede volendo trovare l'altezza di un muro.

L'altro procedimento si fonda sull'uso del traguardo ed è meno originale, essendo una facile applicazione della proprietà di essere simili posseduta da due triangoli rettangoli aventi un cateto comune; non merita che ci arrestiamo ad esporlo particolareggiatamente.

---

(1) Martin, *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron* etc. p. 343.

(2) Letteralmente « cose riunite coll'ago », cioè « cose varie ».

(3) Pubblicato (nell'originale e tradotto in francese) dal Vincent in *Notices et Extraits des manuscrits*, T. XIX, 2.e Partie, 1858, p. 407-415.

Il Papiro Ayer.

75. Mentre lo scritto di Sesto Giulio Africano sembra connettersi ai problemi che Erone ha trattato nel *Traguardo,* a quelli che egli ha risoluti nella parte planimetrica dei Μετρικά pare sia collegato (in modo che oggi non si è in grado di determinare) un frammento di 35 linee complete e di circa altrettante incomplete che Ed. E. Ayer ha trovato nel 1895 in un negozio del Cairo e che probabilmente proviene dagli scavi eseguiti nella vicinanza della piramide di Hawars in Egitto (1). La scrittura adoperata in questo papiro lo fa giudicare non posteriore al principio dell'E. v.; ma lo stile in cui è redatto obbliga a considerarlo come una copia (abbastanza mal fatta) di un trattato di Geometria pratica molto più antico, fors'anche anteriore ad Erone. Esso contiene i resti di sette problemi sul calcolo delle aree piane; uno dei quali (il terzo) è agevolmente ricostruibile, di un altro il testo è completo e di due altri si hanno (a meno di lacune insignificanti) testo e figure. L'esame del contenuto del " papiro Ayer „ fa vedere che l'opera di cui faceva parte si avvicina per la forma, non per la sostanza, all'antico *Manuale del calcolatore egiziano;* giacchè i procedimenti vengono esposti sopra esempî numerici e senz'alcuna giustificazione, ma sono rigorosamente esatti. Notevole che le figure relative sono coperte da numeri indicanti le lunghezze delle linee e le aree delle varie superficie a cui essi sono apposti.

Il primo dei problemi intelligibili nel papiro Ayer si riferisce al calcolo dell'area di un trapezio isoscele di cui si conoscono i lati; è un problema che già incontrammo in Erone (v. n. 72); ma è risoluto diversamente, decomponendo cioè il trapezio in un rettangolo e due triangoli col mezzo di due perpendicolari calate dagli estremi della base minore sulla base maggiore. Per determinare invece la superficie di un trapezio scaleno, l'autore anonimo lo decompone in un rettangolo, due triangoli rettangoli eguali e un triangolo ottusangolo nel modo dichiarato dalla fig. 28ª. Mentre per misurare

(1) Quanto segue è desunto dall'articolo di E. Johnson Goodspeed, *The Ayer Papyrus a mathematical Fragment* (Americ. Journ. of Philology, T. XIX. 1898, p. 25-39).

l'area del quadrilatero, a basi parallele, rappresentato dalla fig. 29ª viene sfruttata la decomposizione nascente col mezzo delle due perpendicolari ivi tracciate. Finalmente, per trovare la superficie di un rombo, determinato dal lato e da una diagonale, chi scrisse il trattato di cui ci occupiamo calcolò, applicando il teorema di Pitagora, l'altra diagonale.

Emerge da ciò che l'opera, di cui il papiro Ayer è un minuscolo frammento, doveva avere — come dicemmo — parentela strettissima con i lavori di Erone, nè è improbabile che avesse qualche connessione collo scritto euclideo che tratta *Della divisione delle figure,* epperò dovrebbe essere molto interessante tanto per la storia della Geometria pratica quanto per quella della Geometria teorica, onde è da augurare che se ne scoprano altre parti; verrebbe forse così chiarito più d'uno dei problemi storici che incontrammo nelle pagine precedenti.

---

76. Mentre le investigazioni geometriche di cui esponemmo i più memorabili risultati nel Libro precedente si possono riunire in tre gruppi i cui temi sono rispettivamente gli elementi della Geometria, i fondamenti del Calcolo infinitesimale e la Teoria delle sezioni coniche, ed i cui autori principali sono Euclide, Archimede ed Apollonio, gli studî che diedero materia al presente Libro della nostra storia, si presentano a prima giunta come un ammasso informe, disordinato, anorganico. Il loro insieme è desso effettivamente tale? È lecito dubitarne *a priori* ed è possibile dimostrare *a posteriori* che veramente non lo è. Ed infatti un attento esame di quanto contengono le pagine precedenti fa vedere che tutte le ricerche matematiche su cui c'intrattenemmo hanno per fine precipuo, confessato o nascosto, diretto o non, la scoperta delle leggi della dinamica celeste. Così dal desiderio di descrivere esattamente i moti degli astri ebbe origine la Sferica, completata più tardi dalla Trigonometria sferica, quando si volle corredare di dati numerici la descrizione dei movimenti degli astri; così la Prospettiva e l'Ottica furono studiate per riuscire a discernere l'apparente dal reale nei fenomeni offerti dal firmamento: donde, in particolare, l'origine della teoria della rifrazione della luce. Nemmeno le indagini di Meccanica

compiute dai Greci sono estranee all' Astronomia; non già che ad alcuno di essi arridesse la speranza di determinare le forze che muovono il sole e l'altre stelle, ma almeno essi agognavano ad essere in grado di rappresentare con moti ben regolati quello che il loro occhio vedeva, senza che la mente loro completamente intendesse: donde la Sferopea, disciplina che pei mezzi impiegati fa parte della Meccanica, ma per lo scopo che si propone appartiene all' Astronomia. Finalmente, come ausiliare di questa, appare senza dubbio la Geodesia, a cui sin dai tempi di Eratostene (L. II, n. 48) — sin da quando, cioè, era stato misurato un arco di meridiano — veniva assegnato l'alto ufficio di determinatrice della conformazione del pianeta che abitiamo.

I frutti che la Geometria deve ai cultori dell' Astronomia e delle scienze sorelle sono di sommo valore: bastino a dimostrarlo la trigonometria sferica, con i suoi annessi e connessi, i procedimenti per rappresentare su un piano la superficie di una sfera, e gli innumerevoli complementi che ricevettero gli elementi della geometria; sicchè lo studio accurato delle opere fisico-matematiche di Euclide ed Archimede, di Tolomeo ed Erone presenta ancora pel matematico un grandissimo interesse, e d'altronde è indispensabile allo storico che vuol conoscere in tutte le sue facce la molteplice produzione degli scienziati che spiccarono durante il periodo greco-alessandrino.

Essi sono veramente le ultime personalità di primo ordine che troviamo nella letteratura matematica degli Elleni; dopo la loro scomparsa comincia la decadenza della geometria greca. Il popolo che aveva innalzato il Partenone ed il monumento a Giove Olimpico, ed aveva creati con Omero e Pindaro i primi perfetti modelli di alta poesia, che si era visto pendere nei circhi e nei teatri dalle labbra degli eroi di Sofocle e trascinato all' audacia ed all'entusiasmo dalla parola di Demostene, che nell' Accademia e nel Peripato aveva seguito in due schiere i maggiori filosofi del mondo, che in geometria aveva fatto delle opere innanzi a cui tuttora è forza inchinarsi come a capolavori, questo popolo, prediletto dalla natura, comincia a divenire sempre meno fertile di produzioni cospicue, scendendo lentamente verso quel livello intellettuale dal quale è universale desiderio risorga a nuova vita.

È vano, a parer nostro, il determinare una causa unica a tale deplorevole mutazione, nemmeno se si restringe la ricerca alla Geo-

metria. Invero siffatta causa non risiede nell'avere i geometri greci del periodo aureo esauriti i campi d'indagini che avevano coltivati; infatti la Geometria elementare ragionevolmente attendeva dei miglioramenti nelle basi e dei complementi nelle sommità, tanto che è rimasta memoria di tentativi fatti a tale scopo; inoltre la teoria delle sezioni coniche, appunto colla perfezione che aveva raggiunto nelle mani di Apollonio, doveva stimolare allo studio approfondito di altre linee; e le importantissime determinazioni metriche eseguite da Archimede col metodo di esaustione non dovevano forse eccitare ad eseguirne altre in modo somigliante? Nè si creda che i metodi allora esistenti non fossero idonei a superare queste difficoltà; vero è che parecchi difetti assai gravi — che lo Zeuthen ha molto acutamente enumerati — li fanno inferiori ai procedimenti oggi in uso; ma che essi non siano tali da renderli inservibili è dimostrato dal fatto che quando, dopo molti secoli dalla loro invenzione, risorse potente il desiderio e sufficiente la forza di far progredire la Geometria, ad essi si ricorse e non invano, chè essi diedero frutti tali e tanti che parve l'antica pianta ripullulasse da profonde radici. Così il metodo cinematico che condusse Ippia ed Archimede a concepire la quadratrice e la spirale diede la vita ad innumerevoli curve; inoltre, l'embrionale Geometria analitica di Apollonio divenne nelle mani di Descartes quel potentissimo metodo che è oggi ormai indispensabile a qualunque matematico; ancora, nel metodo della sezione dei solidi — che somministrò agli antichi le coniche e le spiriche — venne ravvisato uno dei cardini della Geometria projettiva; e finalmente il metodo di esaustione, dopo avere prestato ai moderni servigi altamente apprezzati, si trasformò nell'algoritmo del metodo infinitesimale.

Per queste ragioni noi siamo repugnanti ad ammettere che causa unica della decadenza e rovina della Geometria greca sia una malattia derivante dalla sua costituzione. Tuttavia l'assegnarne altra è difficile, come è difficile ogni altra questione analoga, quale ad esempio sarebbe la determinazione della ragione per cui l'Algebra, dopo di avere avuto la propria sede in Italia all'epoca di Tartaglia e Cardano, abbia esulato dal bel paese, quasi non trovasse più ambiente ad essa propizio. Le condizioni politiche non possono essere state causa unica di sfacelo della matematica greca, chè la storia insegna come dei popoli schiavi, o divisi e dispersi, abbiano mani-

festato, appunto nelle scienze più astratte, la loro persistente vitalità, la loro indistruttibile unità. Il che non toglie che il giogo romano, sovrincombente sulla patria di Pericle, avrà piuttosto ostacolato che favorito il moto in avanti verso la scoperta delle verità geometriche. Al proseguimento del quale avrà probabilmente fatto ostacolo la moda che — lo avvertì il Cantor — non è elemento trascurabile: e nell'epoca greco-romana non era certo la matematica la scienza di moda!

Se, pertanto, a nessuna di siffatte circostanze si può attribuire la parte esclusiva di morbo roditore della matematica greca, per converso, nessuna dev' essere esclusa dall' elenco delle cause della sua scomparsa, chè tutte probabilmente congiurarono a produrre un risultato che non verrà mai abbastanza lamentato.

Tuttavia il genio matematico greco, così fecondo e possente nella giovinezza e nella virilità, non poteva non avere una florida vecchiaja: che l' esattezza di tale previsione sia provata dai documenti esistenti, risulterà dal Libro seguente destinato a descrivere le vicende della Geometria durante l'epoca greco-romana, a studiare la trasformazione che subì la scienza della estensione nell'*èra dei commentatori,* a misurare le migliorìe di cui essa si allietò nel *periodo argenteo della geometria greca.*

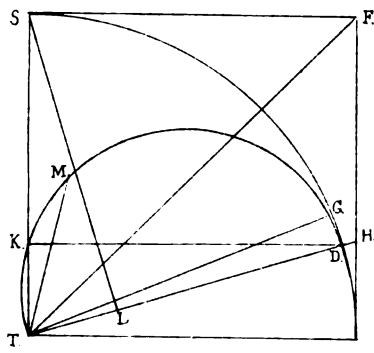
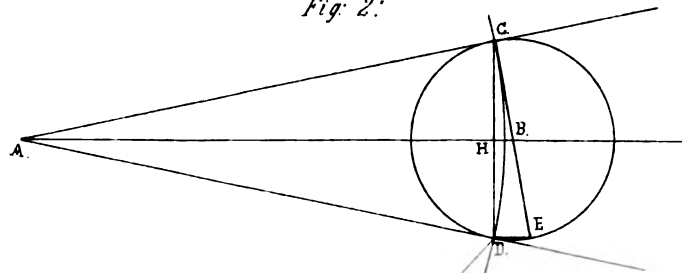
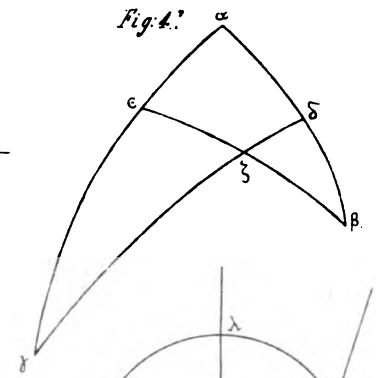



Fig: 1.ª
Fig: 2.ª
Fig: 4.ª
Fig: 3.ª
Fig: 5.ª
Fig: 6.ª
Fig: 7.ª
Fig: 8.ª
Fig. 9.ª
Fig: 10.ª
Fig: 11.ª
Fig: 12.ª
Fig: 13.ª
Fig: 14.ª
Fig: 15

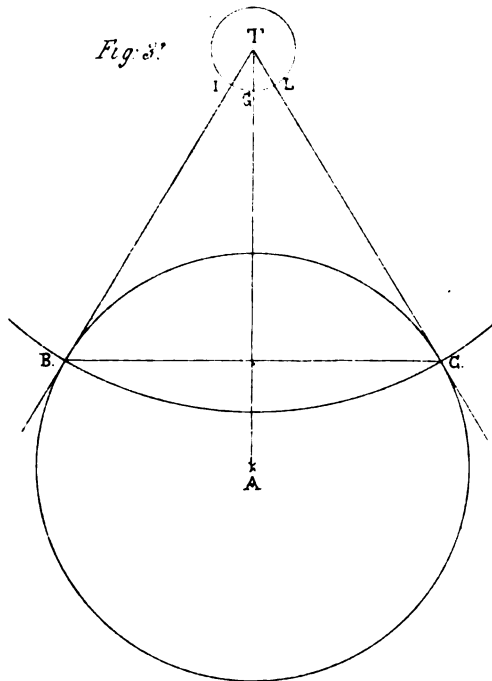
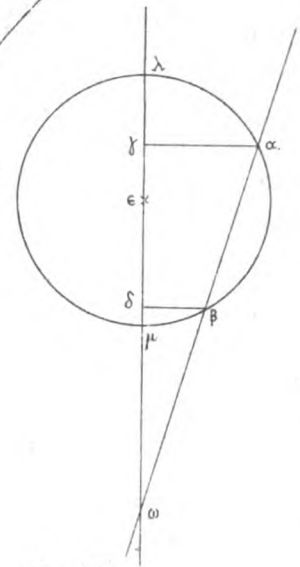
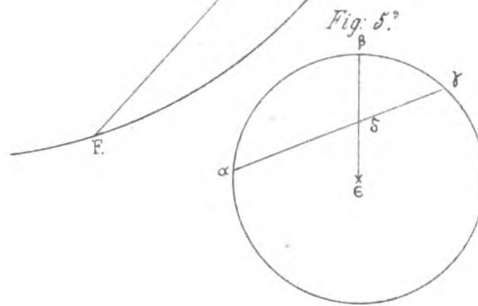
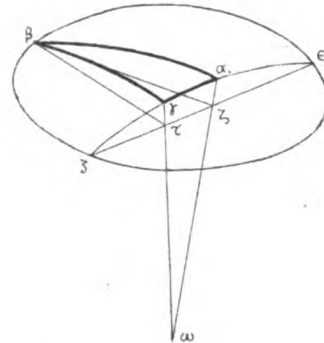
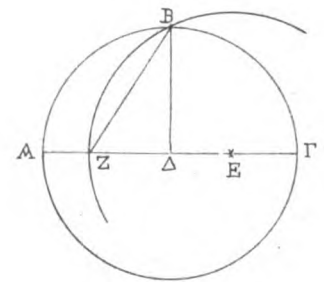
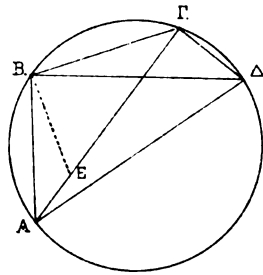
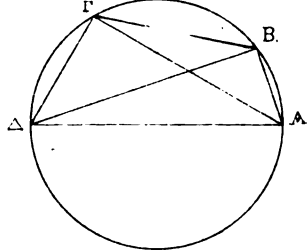
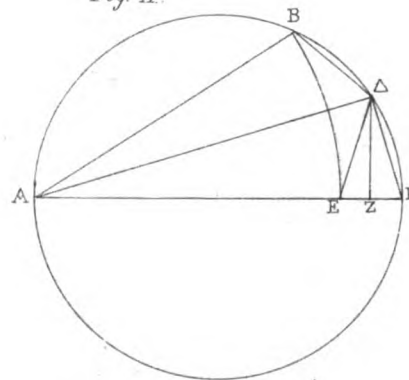
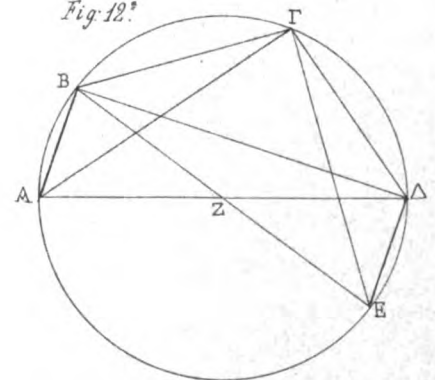
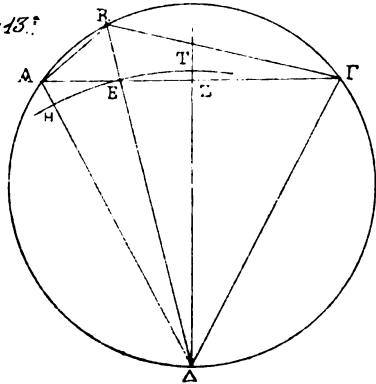
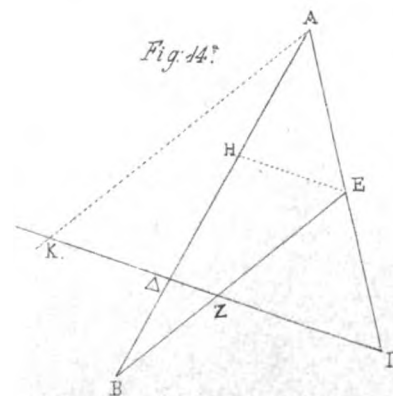



Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 19.

Fig. 18.

Fig. 20.

Fig. 23.

Fig. 21.

Fig. 22.

Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 26.

Fig. 28.

Fig. 27.

Fig. 29.

INDICE

Libro IV.

Il periodo argenteo della geometria greca.

I tempi su cui dobbiamo trattenerci nel presente Libro della nostra storia sono da molti designati col nome di periodo greco-romano, scelto per indicare che essi sono quelli in cui i nipoti di Pericle erano soggetti ai discendenti di Romolo. Tal nome potrebbe far credere che al contatto con i Romani i Greci abbian subito qualche profonda modificazione intellettuale, mentre per converso invano se ne cercherebbe qualche prova, tanto che, se di influenza si vuol parlare, è di quella del popolo vinto sul vincitore (1). È pertanto preferibile scegliere un nome nel quale si specchino, non le condizioni politiche, ma lo stato intellettuale dell'èra di cui imprendiamo lo studio. E siccome — lo accennammo nella chiusa del Libro precedente e lo dimostreremo ora — al valoroso esercito di geometri del periodo aureo, segue nell'attuale una pallida coorte di investigatori sfiaccolati ed anemici, i quali, non avendo forze bastanti a spiccare il volo verso nuovi continenti, dovettero girare e rigirare nei territori già conquistati, così il nuovo periodo storico merita il nome di *èra dei commentatori,* o meglio — per indicare che si tratta di studi geometrici e per uniformità di nomenclatura — di *periodo argenteo della geometria greca,* a cui noi accordiamo la preferenza.

(1) Marco Aurelio, che scrive in greco i propri *Pensieri*, informi.

I geometri di cui dobbiamo occuparci si possono distribuire in tre classi. Gli uni completarono le ricerche del periodo aureo; sono gli epigoni di Euclide, Archimede ed Apollonio, e meritano stima non piccola: Pappo ne è il più eminente rappresentante. Altri invece sono modesti chiosatori, nel senso più stretto della parola; essi spiegano i passi dubbi delle opere più reputate, dimostrarono i lemmi sottintesi dagli autori ed aggiungono i corollari su cui gli autori stessi sdegnarono di arrestarsi; corredando poi di notizie bio-bibliografiche le materie svolte, assicurarono a sè stessi la riconoscenza dei posteri ed ai loro lavori un posto nella biblioteca di qualunque storico. Altri infine illustrarono con considerazioni filosofiche e metodologiche gli scritti più celebri, quasi volessero scoprire e fare proprio lo specifico per redigerne di analoghi; perciò nella matematica greca si comincia a discutere e ragionare sui metodi di investigazione quando alla scoperta di nuovi veri mancava forza ed entusiasmo, al modo istesso che in Roma cominciarono a scriversi trattati sull'arte di vincere quando le aquile latine avevano già da tempo imparati i voli della fuga. Eutocio e Proclo son forse i più spiccati rappresentanti di queste ultime due specie di studiosi, onde stanno in prima linea nell'elenco (L. I, n. 3) delle nostre fonti d'informazione.

Non è a credere però che delle tre categorie che ora abbiamo caratterizzate non esistano esempi nei tempi anteriori a quelli che ora ci volgiamo a descrivere: pur tacendo dello storico Eudemo e dei due Teoni — uno commentatore di Platone (L. IV, n. 12), editore di Euclide l'altro (L. II, n. 8) — Apollonio ed Erone nelle loro investigazioni complementari sugli *Elementi* di Euclide (L. II, n. 68 e L. III, nn. 67-70) mostrarono non esistere campo, per quanto bene sfruttato, che non possa compensare dei ben diretti lavori di ulteriore coltura; per conseguenza i geometri a cui è consacrato questo Libro se non spiegarono alcuna originalità riguardo a metodi e risultati, non ne diedero prova nemmeno nel concepire il piano dei loro studî.

I.

Gemino da Rodi.

1. Nella ricca collezione dei nomi dei geometri citati da Proclo nel suo *Commento al I Libro di Euclide,* quello che si trova ripetuto più di frequente è di Gemino: nemmeno Platone ebbe l' onore di sì frequenti menzioni da parte del suo ardente ammiratore! Una considerazione attenta di quanto Proclo riferisce degli studi di Gemino mostra che questi deve avere scritto qualche lavoro ove erano esaminate le qualità comuni a tutte le curve allora conosciute: a lui infatti viene attribuita la distinzione fra *linee limitate* e *linee illimitate* (*Proclo-Taylor,* T. I, p. 180-183), e fra *linee composte* e *linee semplici* (id. p. 133-135); a lui delle osservazioni intorno alla genesi delle linee mediante movimenti simultanei (id. p. 125) ed in particolare sulla generazione delle spirali, delle concoidi, e delle cissoidi (id. p. 135), alle quali possono poi unirsene altre concernenti le *superficie miste* (p. 138). Finalmente egli, assieme ad altri, generalizzò la Prop. 5.ª del I Libro degli *Elementi* facendo vedere che " non solo per la retta, ma anche per tutte le linee composte di parti fra loro simili, due linee eguali condotte da un punto ad una di esse formano colla stessa angoli eguali " e ne dedusse che, esclusa la retta, la circonferenza e l' elica cilindrica sono le uniche linee composte di parti tutte fra loro simili (T. II, p. 55). Il senso di queste proposizioni non emerge senz'ambiguità dalle parole di Proclo, ma quanto egli dice sembra attestare a sufficienza che fin dall' epoca di Gemino si era concepito quell' importante classe di problemi geometrici il cui scopo è di determinare tutte le figure geometriche godenti di una prerogativa assegnata.

2. Un' altra categoria di citazioni di Proclo mostra che Gemino, seguendo l' esempio di Menecmo (L. I, n. 75), si è eziandio occupato delle questioni che possono dirsi di filosofia matematica: così studiò la natura delle varie proposizioni che s' incontrano in geometria stabilendo fra esse una certa gerarchia (*Proclo-Taylor,* T. II, p. 4 e 12) ed applicò le proprie idee agli *Elementi* di Euclide (id. p. 6, 8); così criticò coloro (fra altri Apollonio stesso) che fecero dei tentativi

per dimostrare quanto è indimostrabile (id. p. 5) o che ritennero sussistere sempre la proposizione reciproca di una vera (ivi); sostenne che alla geometria spetta la ricerca della verità, ma non delle cause per cui sussistono i fatti geometrici (ivi, p. 11), mentre combattè l'assimilazione delle grandezze alle cose divisibili all'infinito (ivi, p. 79). La classificazione delle scienze esatte che egli espone è poi tanto importante per formarsi un concetto della matematica greca che il lettore ci giustificherà se riportiamo quì per intero il brano del commento di Proclo che ne ha serbato memoria.

Un altro modo di dividere la Matematica venne adottato da altri, per esempio da Gemino; essi considerano da un lato ciò che concerne esclusivamente le cose intelligibili, dall'altro quello che si riferisce alle cose sensibili. Le cose intelligibili sono poi per essi quegli oggetti della contemplazione che l'anima desta in sè stessa innalzandosi sopra le cose materiali. La Matematica che tratta delle cose intelligibili comprende, secondo loro, due parti principali: l'Aritmetica e la Geometria; e quella che tratta delle cose sensibili sei parti: la Meccanica, l'Astrologia (1), l'Ottica, la Geodesia, la Canonica (= Musica) e la Logistica. Quanto alla Tattica essi non ritengono, come fanno altri, che essa debba considerarsi come una parte della Matematica: essa però si serve della logistica, quando si tratti di contare le truppe, e della geodesia, quando si vogliano dividere e misurare le superficie. Parimenti, anzi *a fortiori*, non fanno parte della matematica nè la Storia nè la Medicina, benchè gli storici adoperino spesso dei teoremi di matematica, quando parlano della distribuzione dei climi o quando calcolano l'estensione delle città, il loro diametro od il loro circuito, e benchè i medici chiariscano con mezzi somiglianti le questioni che sono di loro competenza. L'utilità dell'astrologia per la medicina è abbastanza evidente in Ippocrate (da Cos) e presso tutti coloro che hanno parlato dei varî climi e delle varie regioni. Nello stesso modo dunque, il tattico si serve della matematica, senza essere un matematico, per disporre le sue truppe in circolo, se egli vuol fare apparire il loro numero il più piccolo possibile (2), oppure per disporle diversamente (in quadrato, in pentagono o secondo qualche altro poligono) per farle apparire più numerose.

Tali sono le differenti branche dell'insieme della matematica. La Geometria si divide a sua volta in Teoria del piano e Stereometria; perchè essa non può avere una parte che tratti in particolare di punti e linee, se non in quanto si può formare con tali elementi qualche figura piana o solida (3); ora in generale il compito della Geometria consiste nel costruire delle figure piane e solide, oppure nel paragonare o dividere le figure costruite. Similmente l'Aritmetica si divide in Teoria dei

(1) Riguardo all'uso fatto dai Greci di questa parola per indicare l'Astronomia v. il Cap. I della *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* del Tannery.

(2) Questa frase prova, osserva a ragione P. Tannery (*La géom. grecque*, p. 39 nota) che la teorica degli isoperimetri era ben nota prima di Gemino.

(3) Quest'opinione non è condivisa dai moderni i quali considerano una geometria delle forme di I specie, distinta dalla teoria di quelle di II e III.

numeri lineari, Teoria dei numeri piani e Teoria dei numeri solidi; essa infatti considera le varie specie di numeri, in sè stesse nella loro progressione a partire dall'unità, la generazione dei numeri quadrati ed eteromechi, e gli aumenti secondo la terza dimensione. La Geodesia e la Logistica sono analoghe alle branche precedenti: soltanto, invece di trattare dei numeri o delle figure intelligibili, esse si occupano delle sensibili; giacchè l'opera della Geodesia non consiste nel misurare il cono od il cilindro, ma sibbene i mucchi coniformi od i pozzi cilindrici; le rette che essa adopera non sono intelligibili, ma sensibili, pur essendo, rispetto alle intelligibili, delle rappresentazioni ora esatte, come i raggi del sole, ed ora più grossolane, come le funi o le righe. Similmente il logistico non considera le proprietà dei numeri in sè stessi, ma sulle cose sensibili, donde viene che egli attribuisce ad essi dei nomi in base agli oggetti che essi servono a contare, chiamandoli ad esempio meliti (*di mele*) o fialiti (*di fiale*). D'altronde egli non ammette, come fa l'aritmetico, che vi sia un minimo, a meno che non si tratti di qualche genere speciale: così un uomo rispetto ad una moltitudine sarà per lui una misura ed una specie di unità. Alla lor volta l'Ottica e la Canonica derivano dalla Geometria e dall'Aritmetica. La prima impiega le linee visuali e gli angoli che esse formano. Le suddivisioni di essa sono: l'Ottica propriamente detta, che rende conto degli errori dovuti alla distanza nell'aspetto degli oggetti visti, per esempio delle convergenze delle parallele o dell'arrotondamento dei quadrati in circoli (1); la Catottrica, consacrata completamente alla riflessione sugli specchi di qualunque sorta ed allo studio complicato delle immagini; la così detta Scenografia, la quale insegna a fare dei disegni rappresentanti degli oggetti a distanze ed altezze differenti, pur conservando alla vista la proporzione e la forma di tali oggetti. Quanto alla Canonica, essa studia i rapporti sperimentali delle lunghezze armoniche e cerca le divisioni canoniche, adoperando sempre i sensi e, come dice Platone, mettendo l'orecchio davanti all'intelligenza. Viene poi ciò che si chiama Meccanica, parte dello studio degli oggetti sensibili e materiali; appartengono ad essa: l'Organopeica, per la costruzione di apparati guerreschi, quali sono quelli che, si dice, abbia inventati Archimede per difendere Siracusa assediata; la Taumatopeica, sia che essa adoperi ingegnosamente i movimenti dell'aria, come nei trattati di Ctesibio ed Erone, sia che con dei pesi o con dei fili o delle fibre essa imiti i movimenti e le azioni degli esseri animati. La Meccanica comprende ancora la conoscenza dell'equilibrio in generale e di ciò che si chiama centro di gravità, la Sferopea che imita le rivoluzioni celesti (fu trattata, ad esempio, da Euclide); in una parola tutta la cinetica della materia. Finalmente l'Astrologia si occupa dei movimenti del mondo, delle grandezze e delle forme dei corpi celesti, della loro illuminazione e delle loro distanze dalla Terra, come pure di tutte le questioni analoghe; essa si poggia molto sull'esperienza dei sensi ed ha inoltre molte affinità con la Fisica. Sono parti di essa: la Gnomonica, che si occupa della determinazione dell'ora mediante i gnomoni; la Metereoscopica, che indaga le varie altezze e distanze degli astri ed insegna buon numero di svariati teoremi di Astrologia; la Diottrica che, col mezzo di opportuni strumenti, insegna le posizioni del sole, della luna e dei varî astri (2).

---

(1) Cfr. i teoremi dell'*Ottica* di Euclide riferiti nel n. 53 del III Libro.

(2) *Proclo-Taylor*, T. I, p. 76-79.

Che Gemino abbia volto il suo pensiero anche al postulato delle parallele si deduce da un cenno fugace fatto da Proclo (id. T. II, p. 11); ed è confermato da un manoscritto arabo attualmente in corso di stampa (1), che già ci accadde di sfruttare (L. III, n. 68), e più ancora dal commento di Anarizio, secondo la versione latina pubblicata dal Curtze (2). Si apprende da questo che Gemino introdusse nella teoria delle parallele il concetto della loro distanza (l. c. p. 9); che egli dimostrò (p. 121) la proposizione: " se due rette sono parallele ogni perpendicolare calata da un punto della prima sulla seconda è perpendicolare anche alla prima ", e successivamente i teoremi seguenti nell'ordine indicato: " Se una retta è perpendicolare a due altre, queste sono parallele e quella ne segna la distanza. Se una retta taglia due rette fra loro parallele, risultano eguali gli angoli alterni; di più un angolo esterno sarà eguale all'interno ed opposto; e due angoli dalla stessa parte saranno supplementari. Se una retta ne incontra due altre per modo che, o siano eguali due angoli interni, o un angolo esterno sia eguale all'interno ed opposto, o siano supplementari due angoli interni dalla stessa parte, queste due rette saranno parallele ".

Da tutto ciò che dicemmo sino ad ora riguardo a Gemino risulta che i suoi studî geometrici dovevano avere una considerevole estensione; eran dessi consegnati in un' unica opera enciclopedica, oppure trovavansi ripartiti in varî scritti? A tale questione Proclo non dà nemmeno un principio di soluzione. Nè maggior soccorso porgono gli altri commentatori di cui disponiamo: vero è che, non soltanto Simplicio, ma anche Pappo ed Eutocio parlano di Gemino; ma il primo si limita a citarlo come testimonio dell'abilità di Archimede (3), ed il secondo, una volta (4) ne riferisce l'opinione intorno alla natura delle proposizioni indimostrate con cui comincia l'opera sull'*Equilibrio dei piani* di Archimede (v. L. II, n. 34) ed un'altra

---

(1) *Codex Leidensis 399, 1*, ed. Besthorn et Heiberg (Hauniae, 1893 e 1897; p. 9, 119, 121, 123, 125, 127, 131. 133 e 169).

(2) *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii* (Lipsiae 1899) p. 13 (le parallele come linee equidistanti), p. 26 (nuova definizione di angolo), pp. 66 e 70-73, (sulla teoria delle parallele).

(3) *Pappo ed. Hultsch*, p. 1026.

(4) *Archimedis Opera omnia*, T. III, p. 308.

volta ne invoca l'autorità per esporre le origini della teoria delle coniche (1). Tuttavia dalla citazione di Pappo il Cantor (2) dedusse che l'opera di Gemino aveva per titolo περὶ τῆς τῶν μαθεμάτων τάξεως (*sulla classificazione delle scienze matematiche*), mentre da quella di Eutocio il Tannery (3) concluse che il titolo cercato è Ἐ τῷ ἕκτῳ τῆς τῶν μαθεμάτων θεωρίας (*teoria delle matematiche*, libro VI), aggiungendo che quello suggerito dal Cantor appartiene ad una sezione di quest' opera. Resta ad ogni modo dimostrato improprio il titolo *Libri geometricarum enarrationum* adottato nel 1560 dal Barozzi (primo traduttore di Proclo) e poi accettato dalla generalità degli storici, epperò inaccettabile l'opinione del Montucla (4) — divisa dallo Chasles (5) — che l'opera di Gemino non fosse che una specie di commento storico-filosofico sulle principali scoperte geometriche. Di tale opera si trovano ancora delle traccie nella compilazione, intitolata *Anonymi variae collectiones,* pubblicata da F. Hultsch in appendice alla sua edizione di Erone (6): sono osservazioni intorno alla definizione ed allo scopo della geometria, sulla definizione di continuo e sulle tre dimensioni dei corpi, sulla logistica e la geodesia, osservazioni che poco sussidio porgono alla ricostruzione dei lavori matematici di Gemino.

4. Ma la letteratura greca annovera un'opera astronomica che porta lo stesso nome d'autore; è un' *Introduzione ai fenomeni* (εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα), ove, in base ai lavori di Ipparco, vengono esposti gli elementi dell'astronomia di osservazione. Non la menzionammo nel Libro precedente perchè il suo valore — malgrado le numerose edizioni di cui venne onorata (7) — non ci parve tale da meritare

---

(1) *Apollonii Pergaei quae graece extant*, ed. Heiberg, T. II, (Lipsiae, 1893), p. 170. Questo brano venne da noi riferito nel n. 77 del L. II.

(2) *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed., Leipzig, 1894), p. 382.

(3) *La géometrie grecque*, p. 19.

(4) *Histoire des mathématiques*, T. I, p. 266 della 2.ª ed.

(5) *Aperçu historique*, p. 25.

(6) p. 246-249.

(7) La prima edizione venne fatta dall'Hilderich (Altorphii, 1590) e tosto ripetuta (Lund. Batav., 1603). Segue poi l'inserzione nell' *Uranologium* del Petau (Lutet. Par. 1630 e Amstel. 1703) e, in principio del nostro secolo, nella *Chronologie de Ptolémée par M. l'Abbé Halma* (Paris, 1819, p. 7-87). L'edizione più recente è quella del Manitius citata più innanzi.

molte parole. Se quì ne facciamo cenno gli è che ad essa ricorsero tutti coloro che vollero determinare in quale epoca vivesse Gemino.

Ed appunto servendosi di essa il Petau (1), e più recentemente il Cantor (2), sostennero che l'*Introduzione* fu scritta nel 77 a C., mentre il Bonjour (3) propose il 137, ed il 140 a. C. il Brandes (4): similmente il Nesselmann (5) fece vivere Gemino mezzo secolo a C., ed il Friedlein ritenne (6) Gemino contemporaneo di Cicerone (106-43 a C.), ma queste conclusioni sembrano rese inaccettabili dalla citazione del filosofo Βόηθος, contemporaneo di Strabone (7), onde l'*Isagoge* sarebbe stata scritta dopo la nascita di Cristo.

Nè minore varietà di opinioni si ha riguardo alla personalità di Gemino. Infatti, secondo Max C. P. Schmidt (8), Gemino sarebbe nato a Rodi, sarebbe stato contemporaneo e discepolo di Posidonio ed avrebbe scritto l'*Isagoge* in età matura a Roma tra il 73 ed il 71 a C.; seguendo invece il Blass (9) l'opera di Gemino non sarebbe che un estratto dell' opera di Posidonio intitolata μετεωρολογικὰ ο περὶ μετεώρων, fatto al più tardi alla fine del II secolo dell' E. v., essendo citato da Alessandro di Afrodisia, il quale professava filosofia ad Atene tra il 198 ed il 210 dell'E. v. Questa tesi venne combattuta vigorosamente dal Tannery (10). Tuttavia essa fu recentemente ripresa, in parte almeno, e modificata dal Manitius (11). Il quale, osservando lo scarso valore dell'*Introduzione ai fenomeni* e tenendo conto degli errori che ivi s' incontrano, la giudicò un cattivo estratto di opere astronomiche, ma non una riproduzione di quella

(1) V. l'opera *Opus doctrina temporum* (Lut. Par., 1627) ed il succitato *Uranologium*.

(2) *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed.), p. 380.

(3) *De nomine Josephi a Pharaone imposito* (Romae, 1696).

(4) *Ueber das Zeitalter des Astronomen Geminos und des Geographen Eratostenes* (Jahrb. üb. klass. Phil., T. XIII. Supplement).

(5) *Die Algebra des Griechen* (Berlin, 1842), p. 6.

(6) *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer* etc. (Erangen, 1869), p. 10.

(7) Manitius, *Des Geminos Isagoge, nach Inhalt und Darstellung kritisch beleuchtet* (Commentationes Fleckeisenianae, p. 95-119).

(8) *Philologische Beiträge zur griechischen Mathematik* (Philologus, T. XLII, 1884), p. 82-110.

(9) *De Gemino et Posidonio* (Kiel, 1883).

(10) *La géométrie grecque*, Cap. III.

(11) V. il lavoro succitato.

dovuta a Posidonio; e ritenendo che sarebbe ingiusto attribuire una tale indigesta compilazione ad un uomo di alto intelletto quale ci si presenta il matematico Gemino, emise l'avviso che questo non dovesse identificarsi coll'autore dell' εἰσαγωγή. Tale opinione ha realmente molti diritti ad essere seriamente considerata: ove trionfasse noi vedremmo dileguarci l'unico soccorso su cui ancor potevasi fare assegnamento per gettare qualche luce sulla vita dello scienziato a cui Proclo attinse a così larga mano; comunque, allo stato attuale delle cose, Gemino deve collocarsi nella categoria di quelle personalità mal determinate — alla quale appartengono, ad esempio, Aristeo (L. I, n. 79-80) ed i pretesi continuatori degli *Elementi* di Euclide (L. II, n. 31) —, di quelle figure incerte che, contemplate attentamente, ci presentano lo strano fenomeno di un inatteso e non desiderato sdoppiamento (1).

II.

Teone da Smirne.

5. L'inflessibilità dell'ordine cronologico riconduce dinnanzi a noi una persona il cui ajuto invocammo nel Libro precedente (n. 11), persona della quale determinammo, almeno approssimativamente, l'epoca e della cui opera studiammo la parte concernente l'Astronomia; ora fa mestieri esaminare che cosa contenga la sezione che alla Geometria si riferisce. Poco di essenzialmente nuovo apprenderemo, e nulla forse a cui Teone abbia posto il marchio di fabbrica;

---

(1) Ulteriori notizie sulla « questione geminiana » si troveranno nel § I dell'Appendice di C. Manitius alla sua edizione di *Gemini Elementa Astronomiae* (Lipsiae, 1898). « La nostra conclusione (scrive l'autore a pag. 251-252) è che il filosofo stoico Gemino, un greco nato probabilmente a Rodi, autore di un'opera di lunga lena sulla divisione delle matematiche, circa verso il 73-67 a. C. compose un commento non meno esteso al trattato elementare di meteorologia del suo maestro Posidonio da Rodi. Da un epitome di esso, composto da lui medesimo ed esistente tuttora nel VI Secolo dell'E. v., un autore ignoto del IV o V Secolo, che scriveva sul 41° parallelo (a Costantinopoli?), ha fatto degli estratti, col titolo primitivo Ἐκ τῶν Γεμίνου πρὸς εἰσαγωγην εἰς φάφαινόμενα, i quali, con ogni sorta di aggiunte giunsero sino a noi sotto il titolo Γεμίνου εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα ».

tutt' al più ne trarremo qualche ulteriore notizia su due individualità eminenti — Pitagora ed Eratostene — che il nostro commentatore attinge ad un mal noto scienziato, di cui già facemmo fugace menzione (L. III, n. 11), cioè Adrasto.

Quanto ci interessa in questo momento dell' opera di Teone abbraccia i capitoli L-LXI della Seconda Parte (1) e si riferisce alle proporzioni o medietà (μεσότητες), argomento che, come sappiamo (cf. L. I, n. 21), veniva dagli antichi aggregato alla geometria. Sorvoliamo sull' esordio, molto prolisso e poco succulento, e rileviamo una proposizione che sembra sia stata scoperta da Eratostene e dimostrata completamente da Adrasto; eccone l' enunciato: " Se a, b, c sono tre quantità in progressione geometrica, lo saranno eziandio $a, a+b, a+2b+c$ ". Teone, come è suo costume, non dimostra in generale questo teorema, ma si limita a verificarlo sopra degli esempi; il ragionamento usato per stabilirne la verità generale sarà stato indubbiamente identico al seguente: essendo per ipotesi $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, sarà $\frac{a}{a+b}=\frac{b}{b+c}$ ovvero $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{b+c}$; e da questa nuova proporzione si trae $\frac{a}{a+b}=\frac{a+b}{a+2b+c}$ c. d. d. Teone si dilunga ad applicare il teorema citato a molti casi particolari; notiamone due: 1.° se $a=b=c=1$, se cioè si ha la " proporzione di eguaglianza ", si dedurranno successivamente le proporzioni:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4} \quad , \quad \frac{1}{3}=\frac{3}{9} \quad , \quad \frac{1}{4}=\frac{4}{16}\ , \text{ ecc.};$$

2.° se $a=n^2$, $b=n$, $c=1$, il valore comune dei rapporti $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{c}$ sarà n, mentre quello dei rapporti $\frac{a}{a+b}$ e $\frac{a+b}{a+2b+c}$ sarà $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$.

A questo punto Teone osserva che " Eratostene dimostra che tutte le figure risultano da qualche proporzione, che per costruirle è forza partire dall' eguaglianza e che in eguaglianza esse si risolvono "; da queste parole di colore alquanto oscuro il commentatore

(1) *Théon de Smyrne, philosophe platonicien, Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon,* trad. par J. Dupuis (Paris, 1892), p. 174-196.

si sente trascinato a discorrere un po' delle figure; accennato al punto, alla linea, alla superficie ed al solido, egli scrive (1):

Fra le linee, la linea retta è quella che è diretta e corre tesa, è quella che, fra due punti dati, è la più breve di tutte quelle aventi gli stessi estremi, e che si estende egualmente fra tutti i suoi punti. La linea curva è quella che non possiede tale proprietà. La medesima differenza si trova fra il piano e la superficie curva. Infatti la superficie è il confine apparente di qualunque solido secondo due dimensioni, lunghezza e larghezza. Ora il piano è una superficie tale che, se una retta la tocca in due punti, essa coincide colla superficie in tutta la sua lunghezza. Due rette sono parallele quando, prolungate all'infinito sul medesimo piano, non s'incontrano e conservano sempre la stessa distanza mutua.

Dà poi la classificazione dei quadrilateri e, come analoga, quella dei parallelepipedi rettangoli: ritroviamo così i solidi già incontrati nelle *Definizioni* attribuite ad Erone (L. III, n. 70) cioè i *cubi* (κύβοι), i *plinti* (πλινθίδες) ed i *travicelli* (δοκίδες), nonchè i parallelepipedi scaleni. Egli ritorna poi alle medietà " la cui teoria è indispensabile per comprendere gli scritti di Platone ".

Vi è medietà, egli scrive, quando, fra due termini omogenei diseguali, si prende un altro termine omogeneo tale che l'eccesso del primo, che è ad un tempo il massimo, sopra questo termine medio, stia all'eccesso di questo sul minimo, come il primo termine sta a sè stesso o ad uno degli altri, ovvero come il più piccolo sta all'uno degli altri.

Questa definizione guida alle sei proporzioni che possono intercedere fra tre numeri $a > b > c$; cioè l'*aritmetica*, la *geometrica*, l'*armonica*, la *sub-contraria all'armonica*, la *quinta* e la *sesta*, esse corrispondono all'essere il quoziente $\frac{a-b}{b-c}$ eguale risp. a $1, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}, \frac{b}{a}$; come esempi di terna di numeri legati da una di tali proposizioni, Teone adduce i seguenti: 3, 2, 1; 4, 2, 1; 6, 3, 2; 6, 5, 3; 5, 4, 2; 6, 4, 1. " I Pitagorici si sono molto dilungati sopra queste sei medietà e le loro sub-contrarie "; altrettanto non fa Teone, il quale si limita, prima di passare all'Astronomia, di indicare come ottenere il termine medio di una proporzione aritmetica, geometrica od armonica. Per l'aritmetica dà tre metodi compendiati nelle espressioni equivalenti che seguono:

$$b = c + \frac{a-c}{2} = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+c}{2};$$

(1) Riferiamo questo brano perchè alcune definizioni ivi contenute differiscono da quelle di Euclide.

per la geometrica dà l'espressione $b = \sqrt{ac}$ e la corrispondente notissima costruzione mediante un semicerchio; finalmente per l'armonica dà in generale la formula

$$b = \frac{(a-c)\,c}{a+c} + c\,,$$

aggiungendo che, nel caso particolare

$$a = 3c,$$

può servire quest' altra

$$b = \frac{(a-c)^2}{2(a+c)} + c.$$

Questo è, se non c'inganniamo, tutto quello che il geometra può apprendere da Teone Smirneo; abbandoniamolo quindi un'altra volta, riserbandoci di richiamarlo come testimonio delle cognizioni aritmetiche degli antichi.

III.

Pappo d'Alessandria.

6. Se dobbiamo tributare alta e illimitata riconoscenza agli uomini ai quali la scienza deve incrementi o progressi, non è lecito ritenercene esonerati verso coloro che ci tramandarono notizie intorno a scritti i quali sarebbero altrimenti caduti in completo oblio, e così resero meno malagevole l'intelligenza o più profonda la conoscenza di altri. Fra questi modesti ma efficaci cooperatori all' avanzamento del sapere, nessuno può vantare benemerenze più cospicue di Pappo d'Alessandria. Gl' innumerevoli usi che facemmo della celebre *Collezione matematica* (συναγωγή) da lui composta ci dispensano da qualunque ragionamento inteso a dimostrare come essa sia una miniera inesauribile di ragguagli indispensabili a chiunque voglia formarsi un concetto adeguato della matematica greca (1).

(1) Il primo a pubblicare per le stampe la *Collezione* fu F. Commandino (*Pappi Alexandrini Mathematici Collectiones a Fed. Commandino Urbinate in latinum con-*

Solamente ricordiamo, come nella grande opera di Pappo s'incontrino, non solo i nomi di quasi tutti i matematici che già studiammo (Apollonio, Archimede, Aristeo, Aristarco, Autolico, Claudio Tolomeo, Conone, Dinostrato, Eratostene, Erone, Euclide, Filone Alessandrino, Gemino, Ipparco, Menecmo, Menelao, Nicomaco, Nicomede, Teone d'Alessandria e Teodosio da Tripoli), ma ancora quelli di certe persone di cui ogni ricordo sarebbe stato altrimenti cancellato: tali sono Demetrio d'Alessandria e Filone da Tiana, autori di lavori oggi perduti sulle curve (1), Eraclito citato a proposito di un problema sulle inserzioni (2) ed un Pericle, commentatore dello scritto di Apollonio *Sulla sezione di ragione* (3); in condizioni analoghe si trovano Ericino ed il filosofo Jerio, dei quali nulla sappiamo, Pandrosio — a cui è diretto il III Libro della *Collezione* (4) e di cui è perfino dubbio il sesso (5) —, Megezio, a cui è diretto il V Libro (6), ed Ermodoro, figlio di Pappo, a cui sono indirizzati gli ultimi due Libri della *Collezione* (7). Sgraziatamente nessuno scrittore posteriore completa le notizie fornite, e nemmeno somministra quelle informazioni sulla vita e le opere di Pappo stesso che sarebbero necessarie per migliorare il complesso di dati, contradditorî nella loro esiguità. Ci esprimiamo così perchè, oltre agli insuf-

---

versae et commentariis illustratae, Venetis, 1589); un complemento a tale edizione diede il Wallis nel III Vol. (Cambridge, 1699) delle sue *Opere:* ed a tali fonti ricorsero per più secoli tutti coloro che vollero conoscere uno dei più cospicui monumenti dell'antica geometria. Al principio del nostro secolo vide la luce, a titolo di saggio, (Parigi, 1824) il testo greco emendato della seconda parte del V libro per cura di E. G. Eisemann; ma tale impresa fu abbandonata; altrettanto accadde della traduzione tedesca della *Collezione* di cui il Gerhardt pubblicò (Halle, 1871) i due ultimi libri. Ma l'edizione completa, in greco e latino, maggiormente pregiata è quella dell'Hultsch (1876-78) che tanto spesso citiamo. Riguardo ad essa si può con profitto consultare l'auto-resoconto pubblicato nel T. II (1878, p. 320-335) del *Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik;* nel quale è inserito un articolo interessante di Jacobi, ingiustamente escluso dalla collezione delle opere complete di questo grande geometra.

(1) *Pappo ed. Hultsch,* p. 270.

(2) Id. p. 783.

(3) Id. p. 640.

(4) Id. p. 30.

(5) V. p. 82 dell'*Index graecitatis* posto al termine di *Pappo ed. Hultsch.*

(6) Id. p. 304.

(7) Id. p. 634 e 1022.

ficienti ragguagli bibliografici somministratici dagli Arabi (1), essi può dirsi riducansi alla notizia, data da Proclo, che Pappo era a capo di una scuola (2) ed a quella, data da Marino, che egli commentò i *Dati* di Euclide (3). Le contraddizioni relative all'epoca in cui visse dipendono da ciò che, mentre secondo una nota posta in margine ad un codice appartenente alla biblioteca di Leida, la *Collezione* sarebbe stata scritta durante il regno di Diocleziano (284-309 dell'E. v.), se si accorda fede al noto lessicografo Suida lo sarebbe stata sotto quello di Teodosio I (379-395). Donde la ragione per cui all'opinione, di Chasles (4) da tanti accettata (5), che Pappo appartenga alla fine del IV Sec. dell'E. v., si è di recente contrapposta (6) e tende a trionfare quella che fa retrocedere la sua epoca di un intero secolo (7) e che noi pure adottiamo.

7. Una raccolta di notizie e di illustrazioni sopra opere differenti e di vario argomento non può possedere quel carattere di unità che distingue un'opera originale; onde non è a titolo di critica che noi osserviamo come la *Collezione* di Pappo abbia piuttosto l'aspetto di un conglomerato che quello di un bel cristallo geometricamente simmetrico. Più di qualunque altro uno scritto di tal natura è soggetto a modificazioni, ad aggiunte o mutilazioni da parte dei ricopiatori i quali si credono autorizzati ad abbandonare il loro ufficio passivo per migliorare quì la forma, per sostituire là la menzione di un'opera con la citazione di un'altra, a loro parere più degna di prendere posto nei fasti della scienza. Laonde affermerebbe probabilmente il falso chi asserisce essere l'opera di Pappo uscita dalle mani del suo autore tal quale ci viene presentata nell'ottima edi-

---

(1) Nel *Fihrist* si legge riguardo a Pappo: « I suoi scritti sono: Un commento al libro di Tolomeo sulla rappresentazione piana della sfera, tradotto in Arabo da Tâbit; ed un commento al X Libro di Euclide, in due parti ».

(2) *Proclo-Taylor*, T. II. p. 206.

(3) *Euclidis Opera omnia*, Vol. VI (Lipsiae, MDCCCXLVI), p. 255.

(4) *Aperçu historique* (II ed., Paris, 1875), p. 28.

(5) V. Monferrier, *Dictionnaire des Sciences mathématiques*, T. II, p. 356; Poggendorff, *Biogr. litt. Handwörtenbuch*, T. II, p. 356.

(6) Quest'opinione, espressa la prima volta un secolo e mezzo fa da van den Hagen (*Observationes in Theonis fastos graecos priores*, Amsterdam, 1735) fu fatta rivivere dall'Usener (*Vergessenes* in *Neues Rhein. Museum*, T. XXVIII, 1873, p. 403).

(7) V. Hultsch nella pref. alla sua ed. di Pappo; Cantor, *Vorlesungen* (II ed., 1894), p 412.

zione critica di F. Hultsch; nello stesso pericolo incorrerebbe, a parer nostro, colui il quale sostenesse che alcuni degli otto libri che compongono la *Collezione* hanno un'origine diversa da quella dei rimanenti; in conseguenza noi ci schieriamo sotto il vessillo del Cantor (1) per combattere il Gerhardt (2) quando cerca di provare a Pappo doversi unicamente i libri III e IV (formanti in origine un solo libro), il VII e VIII. Che poi alla *Collezione* Pappo non abbia potuto dar l'ultima mano, che anzi alcune parti non siano che lezioni redatte da discepoli, sono opinioni che fece germogliare nella mente dell'Hultsch lo studio accurato del testo (specialmente per avere osservate le frequenti ripetizioni), e che noi ci limitiamo a riferire come verosimili.

Degli otto libri di cui, come dicemmo, si compone la *Collezione*, il I è perduto, del II resta soltanto un frammento, del quale ci occuperemo nella seguente sezione della nostra storia, perchè concerne l'Aritmetica dei Greci (3). Che cosa contengano gli altri libri emerge da quanto ora ci accingiamo ad esporre.

8. Il III Libro si apre con una prefazione diretta a quel certo Pandrosio di cui parlammo nel n. 6. Quest'individuo era a capo di una scuola, ma le sue qualità intellettuali e didattiche non dovevano essere molto eminenti dal momento che i suoi discepoli erano imperiti nell'enunciare i problemi; anzi è appunto per illuminare il maestro e i discepoli che Pappo si decise a raccogliere nel primo libro geometrico della *Collezione* le considerazioni su cui ora riferiremo. Tale libro è composto di quattro parti ben distinte.

Nella prima Pappo si occupa della inserzione di due medie proporzionali fra due rette date ed esamina anzitutto la soluzione che era stata a lui sottoposta da un certo Jerio filosofo. Ecco in che cosa essa consiste:

Le due rette date $\alpha\beta, \alpha\gamma$ siano disposte (fig. 1ª) ad angolo retto fra loro; si guidi da β la $\beta\delta$ parallela alla retta $\alpha\gamma$ e si supponga $\beta\delta = \alpha\beta$; condotta $\delta\gamma$ essa incontri $\beta\alpha$ prolungata nel punto ε; si conduca da ε la $\varepsilon\vartheta$ parallela alla retta $\alpha\gamma$ e

(1) V. la recensione dell'opera citata nella nota seg. (*Zeitschr. f. Math. und Phys.*, T. XXI, 1876, *Hist. litt. Abth.*, p. 37-42).

(2) *Die Sammlung des Pappus von Alexandria* (Eisleben, 1875).

(3) Il Wallis, primo editore di quanto resta del II Libro della *Collezione*, congettura, assai ragionevolmente, che anche il I si riferisce all'aritmetica.

si prolunghi $\beta\delta$; si conduca dal punto δ la $\delta\eta$ parallela alla retta $\beta\varepsilon$ e sul prolungamento di $\beta\delta$ si prenda $\delta\nu = \nu\lambda = \lambda\xi = \xi\varkappa = \beta\delta$ e pei punti $\nu, \lambda, \xi, \varkappa$ si conducano $\nu o, \lambda\mu, \xi\pi, \varkappa\vartheta$ parallele alla stessa $\beta\varepsilon$; si supponga $\varkappa\rho = \beta\alpha$ e la si divida per metà nel punto σ e sia

$$\varkappa\vartheta : \vartheta\sigma = \sigma\vartheta : \vartheta\tau = \vartheta\tau : \vartheta\varphi .$$

Dalla retta $\xi\pi$ si stacchi il segmento $\xi\chi$ eguale alla retta $\alpha\beta$ e si conducano $\chi\varphi$ e $\chi\varkappa$; poi da σ la $\sigma\psi$ parallela alla $\chi\varphi$ e da ψ la $\psi\omega$ parallela a $\xi\varkappa$; sia

$$\lambda\mu : \mu\omega = \omega\mu : \mu\alpha_1 = \mu\alpha_1 : \mu\beta_1 .$$

Dalla retta $o\nu$ si tagli $\nu\gamma_1$ eguale alla retta $\alpha\beta$ e si conducano $\gamma_1\beta_1$ e $\gamma_1\lambda$; dal punto ω si guidi la retta $\omega\delta_1$ parallela alla retta $\beta_1\gamma_1$ e dal punto δ_1 la $\delta_1\varepsilon_1$ parallela a $\lambda\nu$; sia

$$\delta\eta : \eta\varepsilon_1 = \eta\varepsilon_1 : \eta\zeta_1 = \eta\zeta_1 : \eta\vartheta_1 .$$

Condotta $\vartheta_1\gamma$ si menino ad essa le parallele $\zeta_1\varkappa_1$ e $\varepsilon_1\lambda_1$ e dai punti $\varkappa_1, \lambda_1$ le $\varkappa_1\mu_1, \lambda_1\nu_1$ parallele alle rette $\alpha\gamma$ e $\beta\delta$. Ciò posto, $\mu_1\varkappa_1$ e $\nu_1\lambda_1$ *sono medie proporzionali* fra $\alpha\gamma$ e $\beta\delta$.

Tale conclusione è falsa, come Pappo dimostra. Ma quello che a lui è sfuggito (o che almeno non gli parve meritevole di venire rilevato) è (1), che *il procedimento di cui egli espose le prime fasi è un metodo per calcolare dei valori di qualunque radice cubica, sempre più approssimati e tutti espressi razionalmente* (2). E così resta dimostrato che, come Archimede concepì (v. L. II, n. 43) il problema della quadratura del cerchio nel modo che solo era capace di condurre a conclusioni attendibili, così un altro Greco — ma probabilmente senza rendersene conto — scoperse la strada per risolvere analogamente, cioè con un metodo di illimitata approssimazione, il problema della duplicazione del cubo (3).

---

(1) Quest' osservazione fu fatta dal Glaisher (*Jahrb. über die Fortschritte der Math.*, T. V, p. 244) nel resoconto di un articolo di R. Pendlebury, *On a method of finding two mean proportionals* (Messenger of Mathem., 2.ª Serie. T. II, p. 166-169). Essa fu completamente svolta dal Günther nell' ultima parte della memoria *Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik* (Abh. der k. böhm. Ges. der Wiss., VI Serie, T. IX, 1878).

(2) Posto $\alpha\beta = a$, $\alpha\gamma = b$ si trova ad es.:

$$\beta\varepsilon = \frac{b^2}{a-b} \quad , \quad \vartheta\sigma = \frac{a(a+b)}{2(a-b)} \quad , \quad \vartheta\tau = \frac{(a+b)^2}{4(a-b)} ,$$

$$\vartheta\varphi = \frac{(a+b)^3}{8a(a-b)} \quad , \quad \mu\omega = \frac{a^2(a+b)(5a+b)}{(3a+b)(3a^2+b^2)} , \text{ ecc.}$$

(3) Riguardo a tal metodo di approssimazione v. il § II del lavoro di P. Tannery, *L'arithmétique des Grecs dans Pappus* (Mèm. de la Soc. de Bordeaux, 2.ª Serie, T. III, 1880).

Alla critica del metodo di Jerio, Pappo fa seguire una esposizione delle difficoltà che presenta la inserzione di due medie proporzionali fra due rette date, e per chiarezza egli premette la classificazione di tutte le proposizioni di geometria.

Gli antichi — egli dice (1) — stabilirono che i problemi di geometria possono essere di tre specie, e chiamarono alcuni piani, altri solidi ed altri lineari. Quelli che si risolvono mediante rette e circoli furono per questo chiamati *piani*, considerando che le linee ausiliarie hanno la loro genesi nel piano. Quelli invece la cui soluzione si ottiene coll'aiuto di una o più sezioni coniche, furono chiamati *solidi;* giacchè per la loro costruzione sono necessarie superficie di solidi, cioè di coni. I rimanenti si considerarono appartenere ad un terzo genere e vennero chiamati *lineari*, giacchè nella loro costruzione si adoperano, oltre alle linee suindicate, altre che hanno genesi differenti e complicate, quali sarebbero le spirali, le quadratrici, le concoidi, le cissoidi, che sono dotate di molte proprietà notevoli (2).

Il problema di Delo, aggiunge Pappo, appartiene alla seconda delle categorie anzidette e fu risolto in varî modi; fra i quali il commentatore alessandrino espone quelli di Eratostene (L. II, n. 49), Nicomede (L. II, n. 72) e di Erone (L. III, n. 61), nonchè quello che noi attribuimmo a Diocle (L. II, n. 73), ma che egli presenta come ritrovato proprio, vantandone anzi le qualità, perchè abilita a risolvere la questione più generale di trovare un cubo che abbia con un cubo dato un rapporto qualunque prestabilito.

9. La seconda parte del terzo libro della *Collezione* ha un tema molto differente; giacchè ivi Pappo coglie l'occasione offertagli dal problema di “ trovare in un circolo tutte tre le proporzioni „ per sviluppare la teoria delle dieci proporzioni (o medietà) che si solevano considerare ancora a' suoi tempi (cfr. L. I, n. 21). Egli stabilisce così un procedimento per “ comporre mediante tre rette α, β, γ in proporzione geometrica, altre tre $\delta, \varepsilon, \zeta$ che formino una qualunque di quelle dieci proporzioni „. Evidentemente questo problema è indeterminato; le soluzioni che egli suggerisce hanno questa particolarità che, ponendo $\alpha = \beta = \gamma = 1$, si ottengono quelle a termini minimi. Le definizioni delle medietà ed il procedimento di Pappo si apprendono dalla seguente tabella (3):

(1) *Pappo ed. Hultsch*, p. 54.

(2) Lo Zeuthen sostiene (v. l'XI Sez. dell'opera *Die Lehre der Kegelschnitte im Altherthum*, Kopenhagen. 1886) che — contrariamente all'asserzione di Pappo — si stabilì prima la distinzione dei luoghi in tre categorie e poi si trasferirono i relativi aggettivi dai problemi alle curve che li risolvono.

(3) Cfr. *Teone Smirneo ed. Dupuis*, p. 188-190.

Nome della proporzione	Proprietà caratteristica di essa	Composizione dei suoi termini	Terne di numeri minimi fra cui esiste quella proporzione
aritmetica . . .	$\frac{\delta-\varepsilon}{\varepsilon-\zeta}=\frac{\delta}{\delta}$	$\delta=2\alpha+3\beta+\gamma, \varepsilon=\alpha+2\beta+\gamma, \zeta=\beta+\gamma$	6, 4, 2
geometrica. . .	$\frac{\delta-\varepsilon}{\varepsilon-\zeta}=\frac{\delta}{\varepsilon}$	$\delta=\alpha+2\beta+\gamma, \varepsilon=\beta+\gamma, \quad \zeta=\gamma$	4, 2, 1
armonica. . . .	$\frac{\delta-\varepsilon}{\varepsilon-\zeta}=\frac{\delta}{\zeta}$	$\delta=2\alpha+3\beta+\gamma, \varepsilon=2\beta+\gamma, \quad \zeta=\beta+\gamma$	6, 3, 2
contrarmonica	$\frac{\delta-\varepsilon}{\varepsilon-\zeta}=\frac{\zeta}{\delta}$	$\delta=2\alpha+3\beta+\gamma, \varepsilon=2\alpha+2\beta+\gamma, \zeta=\beta+\gamma$	6, 5, 2
quinta	$\frac{\delta-\varepsilon}{\varepsilon-\zeta}=\frac{\zeta}{\varepsilon}$	$\delta=\alpha+3\beta+\gamma, \varepsilon=\alpha+2\beta+\gamma, \zeta=\beta+\gamma$	5, 4, 2
sesta	$\frac{\delta-\varepsilon}{\varepsilon-\zeta}=\frac{\varepsilon}{\delta}$	$\delta=\alpha+3\beta+2\gamma, \varepsilon=\alpha+2\beta+\gamma, \zeta=\alpha+\beta-\gamma$	6, 4, 1
settima (1). . .	$\frac{\delta-\zeta}{\delta-\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$	$\delta=\alpha+\beta+\gamma, \varepsilon=\alpha+\beta, \quad \zeta=\gamma$	3, 2, 1
ottava.	$\frac{\delta-\zeta}{\delta-\varepsilon}=\frac{\delta}{\varepsilon}$	$\delta=2\alpha+3\beta+\gamma, \varepsilon=\alpha+2\beta+\gamma, \zeta=2\beta+\gamma$	6, 4, 3
nona	$\frac{\delta-\zeta}{\delta-\varepsilon}=\frac{\delta}{\zeta}$	$\delta=\alpha+2\beta+\gamma, \varepsilon=\alpha+\beta+\gamma, \zeta=\beta+\gamma$	4, 3, 2
decima.	$\frac{\delta-\zeta}{\varepsilon-\zeta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$	$\delta=\alpha+\beta+\gamma, \varepsilon=\beta+\gamma, \quad \zeta=\gamma$	3, 2, 1

Nella terza parte del III Libro Pappo fa conoscere alcune ricerche che un certo Ericino — geometra che P. Tannery considera molto anteriore a Pappo (2) — espose in un libro oggi perduto intitolato *Paradossi*. Egli prende le mosse dal teorema degli *Elementi* di Euclide (Lib. I, prop. 21) che dice " le rette che uniscono gli estremi di un lato di un triangolo ad un punto interno sono in somma minori degli altri due lati del triangolo „ ed istituisce analoghi paragoni fra il perimetro di un triangolo o di un poligono rettilineo ed una linea poligonale tracciata nel suo interno: la completa dimenticanza in cui caddero cotali investigazioni è la più eloquente attestazione della nessuna importanza che venne in esse ravvisata e ci dispensa da più lungo discorso. Soltanto notiamo che ad esse si può ravvicinare il problema " trovare due rettangoli le cui aree ed i cui perimetri stiano in un dato rapporto „ che si

(1) Aggiunta da Commandino e Hultsch per colmare una lacuna nel testo.

(2) *La géométrie grecque* etc., p. 161.

trova in uno degli scritti recanti il nome di Erone (1), e poi al termine del *Manuale di calcolo* di Massimo Planude (2).

La rimanente parte del III Libro ha uno stretto legame con l'ultimo degli *Elementi* di Euclide, avendo per iscopo la costruzione dei poliedri regolari. Il procedimento seguito da Pappo è — come vedemmo (L. I, n. 80) — probabilmente desunto da un'opera di Aristeo e differisce molto da quello adoperato collo stesso scopo da Euclide. Infatti questi comincia dal costruire ogni poliedro fuori della sfera in cui deve alla fine inserirsi, servendosi del diametro di questa soltanto come elemento metrico; finita la costruzione, dimostra l'inscrittibilità del poliedro ottenuto nella sfera data e stabilisce (servendosi del Libro X degli *Elementi*) quale relazione interceda fra il lato del poliedro ed il diametro della sfera. Invece Pappo costruisce i poliedri regolari entro la sfera che li deve contenere, tracciando dei circoli minori i quali intersecandosi determinano i vertici del solido domandato. In Euclide predominano le considerazioni metriche, in Pappo quelle di posizione; il metodo del primo è oggi preferito, ma quello del secondo incontrò più nel gusto degli Arabi, talchè vediamo Abul-Wâfa (940-998) enunciare il problema dell'inscrizione di un poliedro regolare in una sfera come questione avente per iscopo la divisione di una superficie sferica in poligoni congruenti. Nell'applicare il metodo suindicato Pappo arreca qualche complemento alla *Sferica* di Teodosio (v. L. III, n. 31-32) e completa un teorema che noi attribuimmo ad Aristeo il Vecchio (L. I, n. 80) (3) dimostrando che " una stessa circonferenza è circoscritta alle facce del cubo, del tetraedro e dell'ottaedro, ed una stessa alle facce dell'icosaedro e del dodecaedro, supposti tutti questi solidi iscritti nella medesima sfera " (cfr. L. II, n. 30).

E giacchè stiamo segnalando le proprietà metriche che gli antichi avvertirono nei poliedri, è il caso di rilevare incidentalmente, coll'Ideler (4), che ad un certo Nicone da Pergamo è attribuita

(1) *Heronis Alex. geom. et ster. Reliquia* ed. Hultsch (Berolini, 1864), p. 218.

(2) *Das Rechenbuch des Maximus Planudes. Herausgegben von Gerhardt* (Halle, 1865). Uebersetzt von H. Wäschke (Halle, 1878).

(3) Il teorema di Aristeo si ritrova più tardi nella *Collezione* (Lib. V, prop. 48).

(4) V. l'articolo *Ueber eine griechische Inschrift mathematischen Inhaltes* (Monatl. Korresp. zur Bef. der Erd-und Himmelskunde, T. XXIII, 1811, p. 257).

la scoperta del teorema " se ad una sfera è circoscritto un cubo, il rapporto dei volumi dei due solidi eguaglia quello delle loro superficie „; tale teorema sussiste evidentemente per qualunque poliedro circoscrittibile alla sfera, il che venne avvertito da varî geometri soltanto in epoca a noi vicina (1).

10. Il IV Libro della *Collezione* è pure ripartito in varie sezioni, aventi temi fra loro differenti, ma che costituiscono una esposizione delle proprietà possedute da certe curve risolutrici dei tre più celebri problemi geometrici studiati dagli antichi. L'assenza di prefazione ad esso fu addotta da taluno (cfr. la chiusa del n. 7) come prova dell' essere stato in origine il IV Libro unito al III.

La prima di quelle sezioni è quella che presenta minore interesse reale, giacchè non racchiude che proposizioni di " geometria complementare „; fra esse incontriamo per la prima volta la ben nota generalizzazione del teorema di Pitagora, cioè il teorema: " Se (fig. 2.ª) $\alpha\beta\gamma$ è un triangolo qualunque e si descrivono sui lati $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ di esso due parallelogrammi qualunque $\alpha\beta\varepsilon\delta$, $\beta\gamma\eta\zeta$, si prolungano le rette $\delta\varepsilon$ e $\eta\zeta$ finchè s' incontrino in ϑ, e si conduce la retta $\beta\vartheta$, la somma dei parallelogrammi $\alpha\beta\varepsilon\delta$ e $\beta\gamma\eta\zeta$ è eguale al parallelogrammo compreso fra le rette $\alpha\gamma$, $\vartheta\beta$ inclinate di un angolo eguale alla somma degli angoli $\beta\alpha\gamma$, $\varepsilon\vartheta\beta$ „. Questo parallelogrammo si costruisce facilmente conducendo i segmenti $\alpha\lambda$, $\gamma\nu$ equipollenti a $\beta\vartheta$ ed unendo λ a ν. La proposizione precedente (2) non è soltanto una curiosa estensione del teorema di Pitagora; infatti, Chasles ha osservato (3), che essa equivale al teorema di Varignon, che è tanto utile nella teoria dei moti e delle forze; va di più notato che la dimostrazione esposta da Pappo non sarebbe indegna di Euclide.

Il commentatore applica poi la teoria insegnata nel X Libro degli *Elementi* (cfr. L. II, n. 19-20) a determinare a quale categoria di irrazionali appartengano, alcune linee ottenute mediante certe co-

(1) Zanotti, *Sur les figures et les solides circonscrites au cercle et à la sphère* (Hist. de l'Acad. royale des Sciences, Année 1748, p. 613-624), Kästner, *Geometrische Abhandlungen*. II Samml., 1790. p. 90); Buzengeiger, *Anmerkung zu der griechishen Inschrift* (Monatl. Korresp. etc., T. XXIV, 1811).

(2) Che il Bellavitis (nel n. 58 della sua *Sposizione del metodo delle equipollenze*, Mem. della Soc. Italiana delle Scienze, T. XXV, Parte II) a torto attribuisce a Clairaut.

(3) *Aperçu hist.* (II ed., Paris, 1875), p. 545.

struzioni; per dare un' idea delle proposizioni esposte riferiamone la prima: “ se (fig. 3.ª) il semicerchio descritto sopra $\alpha\beta$ ha il diametro razionale, si prolunga $\alpha\beta$ di una lunghezza $\beta\gamma$ eguale al raggio e si conduce la tangente $\gamma\delta$, la congiungente del punto γ col punto medio ε dell'arco $\beta\delta$ sarà una delle linee irrazionali che chiamansi *minori* „ (1).

Le proposizioni successive — fra cui incontransi i *Lemmi* 1, 4, 5 e 6 di Archimede — si riferiscono alla determinazione di circoli soggetti a certe condizioni e sembrerebbero tolte all'opera di Apollonio *Sui contatti* (L. II, n. 65): scopo di Pappo è di arrivare a concludere che “ se tre cerchi sono dati di posizione e grandezza, il cerchio tangente a tutti è pure dato di posizione „. Per conseguirlo egli premette alcune proposizioni preliminari che ci è impossibile riferire; raggiuntolo espone una notevole serie di teoremi che hanno valore permanente e su cui quindi bisogna arrestarsi un istante:

In alcuni libri antichi (2) — egli scrive — si parla di proposizioni di questo genere. Si suppongono dati tre semicerchi fra loro tangenti (fig. 4.ª) $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\delta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta\gamma$ e nello spazio interposto fra le loro periferie, spazio che essi chiamano ἄρβηλος, s'inscrivano quanti si vogliano circoli tangenti ai semicerchi dati e fra di loro; si dimostra che la perpendicolare calata dal centro η ad $\alpha\gamma$ è eguale al diametro del cerchio η (3), che la perpendicolare calata dal centro ϑ è doppia del diametro del

(1) Euclide *Elementi* Lib. X, prop. 76. — La verità di quanto asserisce Pappo emerge dall'osservare che, per la costruzione, fatta ang $\beta\zeta\delta = \frac{\pi}{3}$, ang $\beta\zeta\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ e quindi $\gamma\varepsilon = \zeta\alpha\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

(2) Quali siano è ignoto, ma probabilmente sono quelli stessi da cui gli Arabi estrassero i *Lemmi* che vanno sotto il nome di Archimede; lo fa credere l'analogia di argomento, la somiglianza delle figure considerate da Pappo coll'*arbelo* ed il *salinon* di Archimede. Noteremo a questo proposito come alle etimologie segnalate da noi (L. II, n. 45 nota) della parola σάλινον un altra ne venne aggiunta dall'Heath, secondo cui tal parola, di origine moderna, sarebbe una ellenizzazione della parola latina *salinum* (*The Works of Archimedes edited in modern notations*, Cambridge, 1897, p. XXXIII).

(3) Se infatti si chiamano r_1, r_2 i raggi dei due semicircoli interni, si trova facilmente come espressione del raggio del circolo η

$$\frac{(r_1 + r_2)\, r_1 r_2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2},$$

e come misura della perpendicolare calata dal punto η sul comune diametro

$$\frac{2\,(r_1 + r_2)\, r_1 r_2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}.$$

cerchi ϡ, che la perpendicolare condotta da ϰ è tripla del diametro del cerchio ϰ, che le perpendicolari condotte successivamente dagli altri centri sono multiple dei rispettivi diametri secondo i numeri della serie progrediente per unità, e che la stessa cosa accade se l'iscrizione dei cerchi si prolunga all'infinito (1).

Queste eleganti proposizioni, di cui è ignota la provenienza, nel secolo attuale vennero ristudiate ed estese da Steiner, il quale, negli esordi della sua carriera (2), attrasse su di esse l'attenzione dei pensatori. Lo spazio ci manca per riferire le argomentazioni, che dal lato del rigore non lasciano nulla da desiderare, usate dal Pappo per dimostrare la loro verità (3); soltanto rileviamo, tra le proposizioni ausiliari invocate, quella che (usando la nomenclatura moderna) si enuncia come segue: " se un cerchio ne tocca due altri fra loro tangenti, la retta che unisce i punti di contatto di esso con i due primi passa per un centro di similitudine di questi ".

11. La seconda sezione del IV Libro della *Collezione* si riferisce alla spirale di Archimede (v. L. II, n. 40-41), curva la cui invenzione erroneamente Pappo attribuisce a Conone e di cui egli si occupa probabilmente perchè essa appartiene alla categoria delle curve quadratrici (L. II, n. 40). Espostane la consueta definizione e dimostrata con nuovo metodo la XII delle proposizioni di Archimede, Pappo osserva come il procedimento da lui preferito sia generalizzabile e guidi alla determinazione dell'area descritta dal raggio vettore in una fase qualunque del proprio movimento. È dunque il problema generale della quadratura della spirale che tratta Pappo, cioè quello stesso problema di cui si occupò Archimede nelle Prop. XXVI-XXVIII del suo celebre libro; Pappo lo esamina da un punto di vista differente, epperò giunge a conclusioni diverse da quelle conseguite da Archimede: esse ci sembrano abbastanza notevoli per venir quì riferite.

L'area $S(\varphi)$ descritta dal raggio vettore della spirale $\rho = \alpha\varphi$ quando il raggio vettore parte dall'asse polare e descrive un angolo φ, è misurata da

(1) *Pappo ed. Hultsch*, p. 208.

(2) V. l'articolo *Einige geometrische Betrachtungen* (G. di Crelle, T. I, 1826, *Ges. Werke*, T. I, p. 47).

(3) Altre dimostrazioni leggonsi in Riecke, *Mathematische Unterhaltungen*, III Heft Stuttgart, 1873, p. 93-95).

$$S(\varphi)=\frac{a^2\varphi^3}{6}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\rho\cdot\rho\varphi\right);$$

essa è dunque eguale alla terza parte del settore di ampiezza φ del circolo che ha per raggio la lunghezza del raggio vettore nella sua posizione finale, come appunto trovò Pappo (Lib. IV, Prop. 23). In particolare

$$S(2\pi)=\frac{4a^2\pi^3}{3}$$

onde

$$\frac{S(\varphi)}{S(2\pi)}=\frac{(2a\pi)^3}{(a\varphi)^3}=\left(\frac{\Gamma_1}{\varphi}\right)^3,$$

ove Γ_1 è la periferia del primo cerchio: e questo è un altro teorema di Pappo (Lib. IV, prop. 22). Notisi da ultimo che

$$\frac{S\left(\overline{k+1}\,\frac{\pi}{2}\right)-S\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{S\left(\frac{\pi}{2}\right)}=3k(k+1)+1;$$

facendo ivi $k=1, 2, 3$ si ottengono per questo rapporto i valori 7, 19, 37, pure conformemente ad un'osservazione del commentatore che studiamo (Lib. IV, Prop. 25).

In una sezione seguente della *Collezione*, Pappo definisce la concoide di Nicomede, insegna a costruirne la tangente e ne dimostra le più cospicue proprietà, esponendone poi l'applicazione alla trisezione dell'angolo ed alla duplicazione del cubo: riguardo a questa parte dell'opera di cui trattiamo, è sufficiente riferirci a quanto dicemmo altrove (L. II, n. 71), solo aggiungendo come Pappo asserisca essersi egli occupato della prima delle applicazioni suddette in un'opera che si connette ad altra (al pari di quella perduta) di un tal Diodoro.

12. Nella parte successiva del IV Libro Pappo, volgendosi al problema della quadratura del circolo, dà notizia della generazione della quadratrice di Ippia e Dinostrato (L. I, n. 38 e 81) e fa conoscere le critiche che contro tal generazione rivolse Sporo. Tali critiche — a cui già alludemmo nel n. 81 del nostro L. I. — si riducono in ultima analisi alle due seguenti: 1.° Affine di regolare

i due movimenti, uno di traslazione e di rotazione l'altro, dalla cui coesistenza vien generata la quadratrice, fa mestieri conoscere il rapporto della circonferenza al diametro, cioè avere già risoluto il problema che appunto volevasi sciogliere mediante la quadratrice; 2.° Per trovare la intersezione della quadratrice colla retta, in cui coincidono alla fine del movimento le due rette mobili, è necessario determinare il punto che deve considerarsi come loro intersezione nel momento in cui sono sovrapposte, il che è impossibile. Queste obbiezioni non mancano di base; alla prima si può rispondere adducendo qualche altra generazione della quadratrice indipendente dalla conoscenza del valore di π; ottenendosi in tal modo direttamente la intersezione della quadratrice con la posizione finale delle due rette mobili, verrebbe ovviato anche alla seconda difficoltà. Ma anche prima di far ciò, anche contestando alla quadratrice la prerogativa di servire a quadrare il circolo, essa è indubbiamente meritevole di un bel posto nel gruppo delle curve piane particolari. Tanto più che Pappo ha mostrato che all'originaria costruzione meccanica indicata in origine da Ippia e Dinostrato se ne può costituire un'altra stereometrica, fondata cioè sull'uso dei " loci qui sunt ad superficies ". Il relativo passo della *Collezione* possiede un' importanza straordinaria, che venne segnalata per la prima volta da Chasles (1), e di cui il lettore si renderà conto esaminando gli enunciati dei due seguenti teoremi:

Prop. 28. Sopra un cilindro circolare retto si immagini descritta un'elica; se da tutti i suoi punti si abbassano le perpendicolari sull'asse, esse formeranno una superficie plettoide (2); per una di quelle rette si conduce un piano opportunamente inclinato sul piano del cilindro; esso taglia la superficie plettoide in una curva la cui proiezione ortogonale sulla base del cilindro è la quadratrice (3).

---

(1) *Ap. hist.*, p. 30-32.

(2) Cioè un elicoide a piano direttore.

(3) Per dimostrare la verità di quest'asserzione supponiamo che l'elica considerata abbia per equazioni:

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad , \quad z = \frac{p\varphi}{2\pi}.$$

Il corrispondente elicoide a piano direttore sarà rappresentato dall'equazione

$$\frac{2\pi z}{p} = \mathrm{arc\ tg}\,\frac{y}{x}; \qquad (1)$$

Prop. 29. Un cilindro retto abbia per base una spirale d'Archimede; un cono circolare retto abbia per asse la generatrice del cilindro passante pel polo della spirale; questo cono taglierà quel cilindro in una curva a doppia curvatura. Le perpendicolari condotte dai varî punti di questa all'asse del cono stanno in una superficie plettoide. Un piano condotto per una generatrice di questa superficie ed opportunamente inclinato, taglierà la superficie stessa in una curva la cui proiezione ortogonale sul piano della spirale è una quadratrice (1).

Sia poi

$$z - \frac{p\alpha}{2\pi} + \lambda\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = 0 \qquad (2)$$

l'equazione del piano condotto per la generatrice dell'elicoide corrispondente al valore $\varphi = \alpha$. Eliminando z fra le (1), (2) si otterrà come equazione della projezione di cui parla Pappo

$$\frac{p}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \frac{p\alpha}{2\pi} - \lambda\left(\frac{x}{\cos\varphi} - \frac{y}{\operatorname{sen}\alpha}\right);$$

o, passando a coordinate polari,

$$\frac{p\varphi}{2\pi} = \frac{p\alpha}{2\pi} - \lambda\rho\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\alpha}\right);$$

ovvero

$$\frac{\lambda}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}\,\rho\operatorname{sen}(\varphi-\alpha) = \frac{p}{2\pi}(\varphi-\alpha),$$

Se quindi si sceglie $\lambda = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ e si pone $\omega = \varphi - \alpha$ si otterrà

$$\rho\operatorname{sen}\omega = \frac{p}{4}\,\frac{\omega}{\frac{1}{2}\pi},$$

equazione che rappresenta appunto la quadratrice relativa al cerchio di raggio $\frac{p}{4}$.

(1) La dimostrazione analitica di questa proposizione può farsi così. Le due superficie di cui parla Pappo possono rappresentarsi mediante le equazioni

$$\rho = a\varphi, \; h\rho = r(z-h).$$

L'equazione del luogo delle perpendicolari abbassate dai punti della loro intersezione sull'asse del cono si ottiene eliminando ρ, φ fra le due equazioni precedenti e la

$$\frac{x}{\cos\varphi} - \frac{y}{\operatorname{sen}\varphi} = 0,$$

onde è

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{r(z-h)}{ah}. \qquad (1)$$

Queste considerazioni, le quali stabiliscono relazioni tanto notevoli fra curve piane e superficie, hanno condotto Pappo a concepire sulla sfera una curva analoga alla spirale di Archimede, a studiarla e a scoprirne una proprietà metrica estremamente notevole; siccome egli si è in tal modo procacciato un durevole titolo di gloria, così saremo giustificati se riferiremo le parole stesse con cui egli fa conoscere la propria scoperta (1):

Come nel piano si vede nascere una spirale quando sopra una retta descrivente un circolo si muove un punto, come lo stesso accade nello spazio quando ad esempio un punto si muove sopra una retta generante una superficie cilindrica o conica, così anche in una sfera si può concepire un modo simile di derivazione di una spirale.

Sia (fig. 5ª) nella sfera il circolo massimo $\varkappa\lambda\mu$ e ϑ il polo di esso; da ϑ si descriva il quadrante di circolo massimo $\vartheta\nu\varkappa$; questo ruoti sulla superficie sferica attorno al punto fisso ϑ nel verso $\lambda\mu$ finchè ritorni alla posizione donde è partito; nello stesso tempo un punto percorra il quadrante mobile, partendo da ϑ e giungendo a $\varkappa$; esso in conseguenza descriverà sulla sfera una spirale $\vartheta o\iota\varkappa$ la cui proprietà caratteristica è che, descritta una qualunque circonferenza massima passante per ϑ (e secante in λ la circonferenza $\varkappa\lambda\mu$ ed in o l'elica), essa avrà all'arco $\varkappa\lambda$ lo stesso rapporto che $\lambda\vartheta$ ha con ϑo. Ora dico che se si considera sulla sfera un quadrante di circolo massimo $\alpha\beta\gamma$ (fig. 6ª) avente per centro δ e si conduce la corda $\alpha\gamma$, la metà della sfera starà alla superficie compresa fra l'elica $\vartheta o\iota\varkappa$ e la circonferenza $\vartheta\nu\varkappa$ come il settore $\alpha\beta\gamma\delta$ sta al segmento circolare $\alpha\beta\gamma$ (2).

Per la generatrice di questo elicoide corrispondente a $\varphi = \alpha$ conduciamo il piano

$$\lambda\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = z - h\left(1 - \frac{a\alpha}{2}\right) \tag{2}$$

Se ora si elimina z tra le (1), (2) si avrà l'equazione in coordinate cartesiane della projezione segnalata da Pappo; introducendo coordinate polari, nasce la equazione

$$\frac{\lambda\rho}{\operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha}\operatorname{sen}(\varphi - \alpha) = -\frac{ah}{r}(\varphi - \alpha).$$

Preso dunque $\lambda = -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ e posto $\varphi - \alpha = \omega$ si ottiene

$$\rho\operatorname{sen}\omega = \frac{\pi a h}{2}\,\frac{\omega}{\frac{1}{2}\pi},$$

equazione che appartiene alla quadratrice relativa al circolo di raggio $\frac{\pi a h}{2}$.

(1) *Pappo ed. Hultsch,* p. 264.

(2) Per dimostrare questa elegante proposizione si può oggi procedere come segue: Dette ρ, ω le coordinate polari sferiche aventi ϑ per polo e $\vartheta\nu\varkappa$ per asse polare, si vede

Quali immensi progressi aveva fatto la sferica, da Menelao a Pappo, se era possibile concepire figure e dimostrare relazioni così complicate!

13. A questo punto il nostro autore comincia ad occuparsi del problema generale di dividere un angolo in un certo numero di parti di cui si conoscano i mutui rapporti. Richiamata la classificazione anteriormente esposta dei problemi geometrici (cfr. n. 4), egli fa un cenno — troppo rapido — delle ricerche, oggi perdute, di Filone Tianeo e Demetrio Alessandrino intorno alle curve piane e sghembe, nonchè dei tentativi infruttuosi per dividere in tre parti eguali un angolo dato mediante la riga ed il compasso. Osserva poi che, se l'angolo da dividersi è acuto, il problema può ridursi ad un'inserzione, basandosi sopra una proposizione, che altro non è se non il terzo dei *Lemmi* di Archimede (L. II, n. 45): si aggiunga che quell'inserzione può effettuarsi segando un circolo con un'iperbola equilatera; se l'angolo dato è retto, alla trisezione si giunge mediante luoghi piani; e se è ottuso il problema può ridursi alla trisezione dell'angolo supplementare. Nè a Pappo sfugge che, anche senza previamente ridurlo ad un'inserzione, il problema della trisezione si può sciogliere segando un'iperbola equilatera con un circolo.

Emerge da ciò essere solido il problema della trisezione dell'angolo; lineare è invece in generale quello di dividere un angolo in due parti di cui si conosce il rapporto, e si può sciogliere vuoi

---

facilmente che l'equazione della curva di Pappo è $\omega = 4\rho$. D'altronde, supposto eguale a 1 il raggio della sfera, il differenziale dA dell'area è dato da

$$dA = d\omega\,(1 - \cos\rho) = 4d\rho\,(1 - \cos\rho).$$

Quindi l'area A definita nel testo è data da:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4d\rho\,(1 - \cos\rho) = 4\left[\rho - \operatorname{sen}\rho\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - 4\,;$$

onde

$$\frac{\text{sup. emisfero}}{A} = \frac{2\pi}{2\pi - 4} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}} = \frac{\text{sup. sett. } \alpha\beta\gamma\delta}{\text{sup. segm. } \alpha\beta\gamma},$$

come appunto volevasi verificare.

coll' ajuto della concoide di Nicomede (L. II, n. 71), vuoi colla spirale di Archimede; e Pappo fa notare come, dopo di averlo risolto, siasi in grado di determinare sopra due circonferenze diseguali due archi di egual lunghezza, di costruire un triangolo isoscele di cui si conosca il rapporto dell' angolo al vertice agli angoli alla base e di iscrivere in un cerchio un poligono regolare di un dato numero di lati; egli osserva anche che la quadratrice può servire a determinare un circolo la cui periferia abbia una data lunghezza, a far passare per due punti un arco di cerchio la cui lunghezza abbia un rapporto assegnato con la sua corda, e a trovare due angoli che siano tra loro incommensurabili. Allo studio di tali questioni Pappo connette gli appunti, di cui già facemmo cenno (L. II, n. 41), sopra una certa inserzione adoperata da Archimede, ed incidentalmente dimostra le due proposizioni seguenti, che citiamo perchè ricordano quelle che sarebbero state contenute nei *Luoghi solidi* di Aristeo se questi erano conformi alla divinazione del Viviani (cfr. L. I, Appendice II): " Data una retta a ed un punto A, è un' iperbola il luogo dei punti M tali che, detto P il piede della perpendicolare condotta da M a a, si abbia $\frac{MP}{MA} =$ cost. Dati in grandezza e posizione un segmento AB ed in grandezza un secondo segmento l, è pure un' iperbola il luogo dei punti M tali che, detto P il piede della perpendicolare abbassata da M sulla retta AB, si abbia $AP \,.\, BP = MP \times l$ ".

14. Maggiore unità dei libri III e IV possiede il V libro della *Collezione*, il cui tema è la teoria degli isoperimetri per figure piane (parte I del detto libro) e solide (parte III dello stesso (1)); se, come sappiamo (L. II, n. 75), Pappo non è il capostipite della famiglia dei coltivatori di tale disciplina, se egli non rappresenta il primo anello della catena a cui il secolo nostro ne aggiunse uno rappresentato da Steiner, da quanto ora diremo emergerà che ad esso non si può contestare un posto ragguardevole fra i contributori a quella teoria.

Nella bellissima prefazione al V Libro della *Collezione* — che

(1) La parte II vedemmo (L. II, n. 46) essere un intermezzo lemmatico concernente i poliedri di Archimede.

ci duole di non poter quì riferire per intero — Pappo, volgendosi ad un tal Megezio, espone alcune considerazioni comparative fra l'intelligenza degli uomini e quella degli animali, richiamando l'attenzione del lettore sul fatto sorprendente che le api dànno alle celle ove depongono il miele la forma di prismi a base esagonale regolare, scelgono quindi come base quel poligono che, a parità di superficie, possiede un perimetro maggiore di quelli che hanno il triangolo equilatero ed il quadrato, poligoni che al pari dell' esagono possono adoperarsi per dividere un piano in parti eguali. Nessun fatto poteva essere addotto maggiormente capace di eccitare la curiosità del lettore, di spingerlo a percorrere quelle pagine che gli avrebbero rivelata l' intima ragione di costumanze così strane. Benchè di quel fatto non venga poi tenuto più parola, pure Pappo implicitamente lo spiega; che poi la lettura del V Libro della *Collezione* procuri un vital nutrimento intellettuale anche per altre ragioni, si vedrà da quanto ora diremo.

La prima parte è un rimaneggiamento del noto opuscolo di Zenodoro. Infatti delle prime due proposizioni che ivi si leggono una è la prima di quelle che riferimmo nel n. 75 del nostro L. II, e l' altra ne è un complemento, perchè dice che " se un poligono regolare ha il perimetro eguale alla periferia di un cerchio, la sua superficie è minore di quella del circolo " (1); in altre parole il circolo è mag-

(1) Del citato teorema di Zenodoro (« di due poligoni regolari isoperimetri, ha maggiore area quello che ha un maggior numero di lati ») fu data nel II Lib. (n. 75 nota) una dimostrazione illusoria perchè nell' espressione adoperata per l' area A_n di un poligono regolare di n lati e perimetro $2p$ si è dimenticato un divisore n. Scrivendo, come si deve.

$$A_n = \frac{p^2}{n} \cot \frac{\pi}{n} = \frac{p^2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} \cot \frac{\pi}{n} ,$$

e considerando l' area C del cerchio la cui periferia vale $2p$, avremo

$$C = \frac{p^2}{\pi}$$

e quindi

$$A_n = C \, . \frac{\pi}{n} \cot \frac{\pi}{n} \cdot$$

Ora se consideriamo la funzione

$$f(x) = x \cot x$$

giore di tutti i poligoni regolari isoperimetri. In seguito Pappo dimostra il teorema di Archimede (L. II, n. 43) che asserisce l'equivalenza di un circolo col triangolo rettangolo i cui lati sono eguali alla periferia ed al raggio, e se ne serve per estendere l' ultima delle proposizioni succitate anche a poligoni irregolari. Istituisce poi il paragone fra le aree dei segmenti circolari aventi archi della stessa lunghezza, giungendo a concludere che il massimo ha la forma di un semicircolo: tale conclusione è notevole, ma lo sono pure (per una ragione che diremo poi) i due seguenti lemmi che Pappo premette:

Prop. 15. Sia $\alpha\beta\gamma$ (fig. 7.ª) un triangolo rettangolo in β; descritto col centro in γ l'arco circolare $\alpha\delta$ (δ essendo un punto di $\beta\gamma$), il rapporto del settore circolare $\delta\gamma\alpha$ al triangolo mistilineo $\alpha\beta\delta$, risulterà maggiore del rapporto di un angolo retto all'angolo $\beta\gamma\alpha$.

Prop. 16. Sia ancora (fig. 8.ª) $\alpha\beta\gamma$ un triangolo rettangolo in β; descritto col centro in γ l'arco circolare $\alpha\delta$ (δ essendo sul prolungamento della retta $\beta\gamma$), il rapporto del settore circolare $\alpha\gamma\delta$ al triangolo mistilineo $\alpha\beta\delta$, risulterà maggiore del rapporto di un angolo retto all' angolo $\alpha\gamma\delta$.

Ora se si cerca di esprimere coi nostri simboli il contenuto di quest' ultima proposizione si ottiene una relazione del seguente tipo

$$\frac{x}{x - \text{sen}\, x} > \frac{\pi}{x}, \qquad \text{supposto} \qquad 0 < x < \pi;$$

relazione che pertanto è da aggiungersi alla collezione di proposizioni trigonometriche (v. L. II, n. 38; L. III, n.ⁱ 20 e 41; L. IV, n. 37) conosciute dai Greci.

Dopo un intermezzo sui poliedri di Archimede di cui già ci servimmo nel II Libro (n. 46), Pappo s' industria di generalizzare allo spazio le conclusioni precedenti, ma non raggiunge che parzialmente il suo intento. Egli dimostra, cioè, che a parità di superficie la sfera

---

vedremo che $f(o) = 1$ e che essa funzione è crescente per tutti i valori di x. Sarà quindi

$$\frac{\pi}{n} \cot \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n+1} \cot \frac{\pi}{n+1}$$

epperò

$$A_n < A_{n+1}$$

ed inoltre

$$A_n < C;$$

come appunto trovarono Zenodoro e Pappo.

è maggiore di qualunque poliedro regolare inscritto, fa vedere anche che di due poliedri regolari aventi la medesima superficie è maggiore quello che ha più facce (1), ma non riesce a concludere *quello che asserirono i filosofi* (come egli si esprime) che la sfera è maggiore di qualunque poliedro irregolare iscritto, non vi riesce nemmeno se si completano le sue argomentazioni con gli scolî pubblicati da Hultsch (p. 1138-1165).

Ma gli sforzi che egli fece per raggiungere questo teorema generale (teorema difficile che nemmeno Steiner giunse a stabilire con assoluto rigore) non furono infruttuosi, perchè condussero a nuovi teoremi di cui importa far cenno. Uno venne già citato (L. II, n. 38, nota); altri due (prop. 21 e 22) appartengono alla trigonometria geometrica dei Greci (2) e dicono in sostanza che " la projezione di un segmento è eguale al prodotto della lunghezza del segmento pel coseno dell' angolo del segmento coll' asse „, e che sussiste l' equazione

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \cot \frac{x - y}{2}.$$

La relazione avvertita da Euclide (*Elementi*, Lib. XIII, prop. 9) tra il raggio di un circolo ed il lato del decagono regolare inscritto (" i lati dell' esagono e del decagono regolari inscritti in uno stesso cerchio, costituiscono una retta divisa in media ed estrema ragione, essendo il primo lato la parte maggiore „), viene trasformata in modo conveniente da Pappo, il quale dimostra che " se si divide il raggio di un cerchio in media ed estrema ragione, la parte maggiore sarà eguale al lato del decagono regolare inscritto „. Più innanzi egli fa vedere che tra i raggi R e r delle sfere, circoscritta ed inscritta, ad un ottaedro passa la relazione

$$R^2 = 3r^2 \quad (3),$$

(1) La verificazione di tale asserto può farsi applicando le formole stabilite nel n. 30 del L. II.

(2) Usiamo tal nome in opposizione a quello di « trigonometria analitica » dei moderni.

(3) Per verificarla si ricordi (v. p. es. Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie*, IV éd., Paris 1879, II Partie, p. 245) che si ha

$$r = \frac{l\sqrt{6}}{2}, \; R = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

se l è il lato del decagono.

e che fra il lato l di un icosaedro ed il raggio r della sfera iscritta passa la diseguaglianza

$$15r^2 > 5l^2$$ (1).

Nuove proprietà della divisione di una retta in media ed estrema ragione si apprendono dai §§ XLIX, LI, LII, LIII e LIX: esse completano le proposizioni che Eudosso forse scoperse (L. I, n. 70) ed Euclide ha raccolte nell' esordio all' ultimo Libro degli *Elementi* (L. II, n. 23); sono relazioni non soltanto di eguaglianza, ma anche di diseguaglianza, dalle quali emergono dei valori approssimati per $\sqrt{5}$. Analogamente, la limitazione

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

emerge dal § XLIV, mentre dal § LVII (" dodici pentagoni regolari inscritti in un circolo danno una somma superiore a quella di venti triangoli equilateri inscritti nello stesso circolo ") si trae la relazione

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} > \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3},$$

la quale dà ragione eziandio del teorema contenuto nel § LVIII.

Chiuderemo tale nostro cenno sul V Libro notando che esso finisce con una dimostrazione dell' impossibilità di altri poliedri regolari convessi all' infuori di quelli di Platone, la quale è identica in sostanza a quella che forma l' epilogo degli *Elementi* di Euclide.

15. Sul libro VI della *Collezione* ci è lecito di essere brevi; esso contiene osservazioni e varianti sulle ipotesi fatte e sulle proposizioni esposte nelle opere che formano la " piccola collezione astronomica " (v. L. III, n. 24), e precisamente nella *Sferica* di Teodosio (id., n. 30-32), nel libro *Sopra la sfera mobile* di Autolico (id. n. 26), in quello *Su i Giorni e le notti* di Teodosio (id. n. 30), nell' opuscolo di Aristarco che a suo tempo studiammo (n. 19-21), finalmente nell' *Ottica* (n. 53-55) e nei *Fenomeni* (n. 28) di Euclide. Il paragone dei commenti con le opere a cui si riferiscono mostra

(1) Lo si deduce dall' essere (*l. c.* nella nota prec.).

$$r = \frac{l\sqrt{3}\,(3+\sqrt{5})}{12}.$$

che lo studio di esse non fu per Pappo molto suggestivo; chè il libro VI della *Collezione* è forse quello in cui egli spiegò la minore originalità. Tuttavia nel commentare l' *Ottica* egli trovò modo di esporre alcune verità non insignificanti; incontriamo infatti le seguenti proposizioni, che si considerano oggi come ingrediente indispensabile di qualunque trattato di stereometria e che certamente erano già note molto tempo prima di Pappo: " Se si abbassa da un punto qualunque M dello spazio la perpendicolare ad un dato piano π, e dal piede N di essa la perpendicolare NP ad una retta r del piano π, la retta MP risulterà perpendicolare a r. L'angolo di una retta r con la propria projezione r' su di un piano π è il minimo fra quelli che essa forma con le rette s condotte nel piano π pel punto $r\pi$; l'angolo rs cresce coll'angolo $r's$ e due rette s egualmente inclinate sopra r', formano angoli eguali con r ". Più originale ed importante è la ricerca — che sembra (1) altri affrontasse prima indarno — di determinare l'aspetto apparente di un circolo visto da un punto qualunque dello spazio (2), di determinare cioè gli elementi che individuano l'ellisse che si presenta all'occhio. Pappo esegue tale determinazione e ne trae la soluzione del seguente importante problema: " dati un'ellisse ed un punto nel suo interno, determinare la posizione dell'occhio in modo che l'ellisse abbia l'aspetto di un circolo col centro in quel punto ".

16. Un valore più grande del libro VI della *Collezione* è posseduto dal VII, il quale si apre con un esordio interessantissimo che è necessario di riferir quì:

Il *luogo* che si dice *risoluto* (3), o figlio Ermodoro, è, per dirlo in poche parole, quella certa speciale materia preparata ad uso di coloro che, avendo esauriti i soliti elementi, vogliono divenire destri nel risolvere problemi proposti, eseguendo costruzioni mediante linee. La quale (speciale materia) venne trattata da tre uomini, cioè Euclide, l'autore degli *Elementi*, Apollonio Pergeo ed Aristeo Seniore; essa procede per *risoluzione* (ἀνάλυσις) e *composizione* (σύνθεσις). La risoluzione è quella via o

(1) *Pappo ed. Hultsch,* pag. 558, lin. 20.

(2) Come Pappo fosse condotto a tale problema vedemmo nel Libro precedente (n. 55). Coloro che concepirono per primi questo problema senza sciogliierlo furono (a quanto dice Pappo) traviati dal preconcetto che l'ellisse apparente avesse per centro la projezione del centro del circolo obbiettivo.

(3) τόπος ἀναλυόμενος; secondo Gow (*A short history of the greek mathematics,* Cambridge, 1884, p. 211) la traduzione di questa frase è « collezione di opere di natura analitica ».

metodo con cui dalla cosa cercata, ammessa come trovata, passando per quello che successivamente ne deriva, si giunge al punto da cui prende le mosse la composizione. Nella risoluzione, supponendo già eseguito quello che si domanda, si considera ciò da cui scaturisce, poi ancora quello che precede, finchè successivamente indietreggiando si arriva a qualche cosa che sia noto o evidente; tale modo di procedere si chiamò risoluzione appunto perchè alla soluzione si arriva retrocedendo. Nella composizione invece, ammesso di avere già effettuata la risoluzione, si dispongono le cose nel loro ordine naturale e si combinano fra loro sinchè si arrivi a costruire quello che è domandato; e ciò si chiama composizione.

I generi di risoluzione sono poi due. Uno di essi, avendo per oggetto la ricerca della verità, si chiama *speculativo* (θεορητικόν), mentre l'altro, servendo a trovare quello che è proposto, si chiama ***problematico*** (προβλεματικόν). Nel genere speculativo adunque supponiamo prima che le cose da trovare esistano realmente, e passando per le conseguenze derivanti supposte vere e per le ipotesi fatte, giungiamo ad una cosa ammessa; se questa è vera, sarà anche vera quella che cerchiamo e la dimostrazione non sarà che la risoluzione invertita; se al contrario c'imbattiamo in qualche cosa notoriamente falsa, sarà dimostrata falsa anche quella che noi cerchiamo. Per converso nel genere problematico, ammettendo già trovato ciò che si cerca ed attraversando le conseguenze che ne derivano, ammesse per vere, passiamo ad una cosa ammessa; se questa esiste e si può costruire (allora i matematici la chiamano *data*) anche la cosa proposta si potrà ottenere e anche in tal caso la dimostrazione sarà la risoluzione invertita; ma se cadiamo in una cosa notoriamente falsa, il problema sarà irresolubile.

Questo è quanto andava detto su la risoluzione e la composizione.

L'ordine dei libri che trattano il luogo risoluto è il seguente: I ***Dati*** di Euclide, in un libro; la *Sezione di ragione* in due libri, la *Sezione di spazio* in due, la *Sezione determinata* in due, ed i *Contatti*, in due, di Apollonio; i *Porismi* di Euclide in tre libri; le *Inserzioni* di Apollonio, in due libri, e, dello stesso autore i *Luoghi piani* in due libri, e le *Coniche* in otto; i *Luoghi solidi* di Aristeo in cinque libri, i *Luoghi superficiali* di Euclide in due libri e le *Proporzioni* di Eratostene pure in due libri. In totale dunque si hanno trentatrè libri, gli argomenti dei quali io esporrò, notando il numero dei luoghi, i diorismi, i casi che sono in ciascun libro, senza sottintendere i lemmi necessari, in modo da non omettere alcuna questione relativa ai libri stessi (1).

Fedele all'impegno preso il commentatore riassume e spiega le principali fra tali opere; dei ragguagli, veramente preziosi, che egli porge abbiamo già tratto gran profitto trattando di Euclide (L. II, n. 27-29), Eratostene (L. II, n. 50) ed Apollonio (L. II, n. 63-67) onde non è mestieri quì ritornarvi. Soltanto nel brano che concerne i *Contatti* rileviamo un complemento ad un lemma di Archimede (cfr. L. II, n. 45 nota); in quello relativo ai *Porismi* la generaliz-

(1) *Pappo ed. Hultsch*, p. 634-638.

zazione di un teorema di Euclide (1); ed in quello relativo alle *Coniche,* oltre a una critica di coloro che parlano di " prodotto di quattro linee (2) „ ed al modo di evitare tal dicitura nell'enunciare il problema delle tre o più rette, le seguenti proposizioni: " Le figure generate da una rotazione completa hanno fra loro un rapporto composto di ciò che ruota e delle rette condotte similmente sino agli assi delle rotazioni dai baricentri delle figure mobili. Le figure generate da una rotazione incompleta hanno fra di loro un rapporto composto di ciò che ruota e degli archi descritti durante le rotazioni dai loro baricentri „. Chi non ravvisa in questi enunciati il celebre teorema che a torto si suol attribuire al Guldin, il quale lo fece conoscere circa tredici secoli più tardi (3)?

17. Indicati gli argomenti dei principali fra gli scritti che compongono il *luogo risoluto,* Pappo dimostra una folla di lemmi destinati ad agevolarne la intelligenza. Anche quì il paragone di essi con le opere superstiti a cui si riferiscono mostra che di regola il commentatore si limita a dimostrare proposizioni ausiliari che l'autore tacque. Ma talora egli si ispira a quelle opere e sa aggiungere del suo qualche cosa d'importante, sicchè alcuni teoremi di Pappo rappresentano dei complementi notevoli alle produzioni che appar-

(1) Eccone l'enunciato: « Si considerino $n+1$ rette, n delle quali ruotino attorno alle loro intersezioni con la rimanente; esse si tagliano in altri $\frac{n(n-1)}{2}$ punti; ora se $n-1$ di questi punti percorrono altrettante rette date, anche i rimanenti $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ descriveranno ciascuno una retta ». Pappo modestamente osserva (ed. cit., p. 654) che ad Euclide non rimase certamente ignota questa proposizione, ma che non la dimostrò essendo suo intento di esporre soltanto i fondamenti.

(2) Id. p. 680. È in questo punto che Pappo parla del problema delle tre o più rette (cfr. L. II, n. 55); è alle sue parole che devesi se questo problema venne da Descartes, nel I Libro della sua *Géométrie* (1637) chiamato *problema di Pappo* e se poi Chasles chiamò *teorema di Pappo* (*Ap. historique,* pag. 37; *Traité des sections coniques,* I[er] Partie, Paris, 1865, p. 16) quello che afferma essere una conica la curva che risolve il problema delle tre o quattro rette.

(3) « Quantitas rotanda in viam rotationis ducta, producit Potestatem Rotundam uno grado altiorem Potestate sive Quantitate Rotata ». *Centrobaryca,* Lib. II, Cap. VIII. Prop. 3 (Viennae, 1640). « Je n'ai garde néammoins d'accuser Guldin de plagiat, mais il me parait difficile de l'en disculper », osserva a questo proposito il Montucla (*Hist. des Mathématiques,* 2.ª ed., T. I, p. 330) con quella bonomia che forma una delle maggiori attrattive del suo stile.

tengono al periodo aureo della geometria greca, epperò hanno il diritto di venir quì segnalati.

Cominciamo dall'osservare che Chasles, con quell'acuto senso critico che lo pone in prima linea fra gli storici della matematica, notò (1) che i lemmi alla *Sezione determinata* di Apollonio si possono considerare siccome espressioni di relazioni fra punti in involuzione. Con maggior precisione, le Proposizioni 22, 29, 30, 32, 34, 36 e 44 esprimono altrettante relazioni fra due coppie di punti conjugati ed il punto centrale dell'involuzione; le 37-38 delle relazioni fra una coppia di punti conjugati, un punto doppio ed il punto centrale; le 39-40 delle relazioni tra due coppie di punti conjugati ed un punto doppio; e le 45-46, con i loro casi speciali 41-43, delle relazioni tra due coppie di punti conjugati, il punto centrale ed un altro punto. Ma anche chi fosse riluttante ad ammettere la interpretazione data da Chasles per questi lemmi, non potrà negare che essi sono altrettanti ingredienti della disciplina chiamata dallo Zeuthen *algebra geometrica* (v. L. II, Appendice): a dimostrarlo bastano gli enunciati che ora ne diamo in linguaggio moderno (2).

Prop. 22 e 29. Se $ax = by$ sarà $\frac{b}{y} = \frac{(a+b)(b+x)}{(a+y)(x+y)}$.

Prop. 25, 30, 32, 34-36 e 44. Se $(b-a)(b-c) = (d-b)(e-b)$ sarà $\frac{(d-a)(d-c)}{(e-a)(e-c)} = \frac{d-b}{e-b}$.

Prop. 37-38. Se $\frac{a}{c} = \frac{(a-b)^2}{(c-b)^2}$ sarà $ac = b^2$ (3).

Prop. 39-40. Se $\frac{(b-a)(e-a)}{(b-d)(e-d)} = \frac{(c-a)^2}{(c-d)^2}$ sarà $\frac{(b-a)(b-d)}{(e-a)(e-d)} = \frac{(b-c)^2}{(e-c)^2}$.

Prop. 45-46. Se $(d-a)(d-c) = (b-d)(e-d)$ si avrà, qualunque sia x, $(x-a)(x-c) - (x-b)(x-e) = (b-a-c+e)(x-d)$. Facendo ivi successivamente $x = a, b, c, e$ si ottengono le Prop. 41-43 di Pappo.

Va ancora rilevato che le prop. 61, 62 e 64 risolvono questioni di massimo e minimo; secondo Chasles sono pure collegate all'involuzione di punti, ad ogni modo esse possono compendiarsi nell'enun-

(1) *Aperçu historique*, p. 39.

(2) In questa traduzione in formole di relazioni segmentarie vi è sempre un elemento arbitrario, cioè la scelta dell'origine; ma al variare di questa, le relazioni risultanti subiscono soltanto alterazioni superficiali.

(3) Questa relazione si trova anche fra i lemmi al V Libro delle *Coniche* (Prop. 206).

ciato seguente: " date su di una retta due coppie di punti M, N e P, Q, trovare sulla stessa un quinto punto X tale che il rapporto

$$\frac{MX \cdot NX}{PX \cdot QX}$$

risulti massimo o minimo „. Non vi è chi non vegga essere questa la questione di algebra geometrica che corrisponde alla ricerca dei valori estremi del rapporto fra due funzioni di secondo grado di una variabile; forse come tale venne scelta da Fermat per sperimentare il proprio metodo *de maximis et minimis* (1).

18. Proseguendo la nostra descrizione dei lemmi di Pappo noteremo, fra quelli che concernono il I Libro delle *Inserzioni*, la soluzione, indicata da un certo Eraclito, del seguente problema: " dato un quadrato $\alpha\beta\gamma\delta$ (fig. 9.ª) inserire tra il suo lato $\gamma\delta$ ed il prolungamento di $\alpha\delta$ un segmento $\eta\varepsilon$ di data lunghezza per modo che il suo prolungamento passi pel vertice β del quadrato „: la soluzione stessa poggia sopra il seguente teorema: " se nel quadrato $\alpha\gamma$ (stessa figura) si conduce la trasversale $\beta\eta\varepsilon$, poi $\varepsilon\zeta$ perpendicolare $\alpha\beta\varepsilon\beta$ si avrà

$$\overline{\gamma\delta}^2 + \overline{\eta\varepsilon}^2 = \overline{\gamma\zeta}^2 \text{ (2) } ».$$

Poco dopo troviamo il seguente teorema di minimo: " fra le rette condotte entro un angolo da un punto della bisettrice, la minima è perpendicolare alla bisettrice „. — Di natura differente sono i teoremi che Pappo collega al II Libro delle *Inserzioni*: a titolo di esempio citiamo il seguente: " Dati (fig. 10.ª) due semicerchî aventi i loro diametri $\alpha\gamma, \delta\zeta$ sulla stessa retta, si prenda $\zeta\eta = \alpha\delta$; allora una trasversale qualunque condotta pel punto γ taglia una seconda volta in β il primo di quei semicerchî e nei punti $\varepsilon, \varkappa$ il secondo; detta ϑ la projezione ortogonale di η sulla trasversale, i due segmenti $\beta\vartheta, \varepsilon\varkappa$ avranno lo stesso punto medio. In particolare, se la trasversale tocca in μ il secondo cerchio e taglia in ν il primo, μ sarà il punto di mezzo del segmento che ha per estremi il punto ν e la projezione ϑ del punto η su quella trasversale tangente „ (prop. 80 e 81).

---

(1) *Oeuvres de Fermat* (ed. Tannery et Henry), T. I, Paris, 1891, p. 140.

(2) *Pappo ed. Hultsch*, p. 780; v. anche p. 1260.

Alcune fra le proposizioni con cui Pappo agevola l'intelligenza dell'opera di Apollonio *Sui contatti* concernono rette tangenti a circonferenze e circonferenze tangenti fra loro, crediamo superfluo arrestarci su di esse essendo corollari o semplici complementi a quelle raccolte da Euclide nel III Libro degli *Elementi*. Va invece notato il seguente problema: " Dati in un piano un cerchio e tre punti in linea retta $\delta\varepsilon\zeta$, trovare sulla periferia del cerchio un punto α tale che, condotte $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$ a tagliare nuovamente la circonferenza in β, γ, la retta $\beta\gamma$ passi per ζ " (Prop. 117), problema di cui Pappo tratta direttamente il caso che corrisponde al supporre ζ all'infinito (Prop. 105, 107, 108). Non è necessario osservare che, togliendo la condizione della collinearità fra i punti $\delta\varepsilon\zeta$, il problema trattato da Pappo si trasforma in quello che porta i nomi di Cramer e Castillon; ma importa rilevare come le più belle soluzioni di tal problema vennero appunto ottenute ispirandosi al passo surriferito della *Collezione matematica* (1).

Come introduzione al resoconto sui *Luoghi piani* Pappo fa conoscere una sottile classificazione dei luoghi, tolta a quanto sembra da Apollonio.

I luoghi in generale, egli scrive (2), sono alcuni ἐφεκτικοί (***fissi***); tali sono, come dice Apollonio nell'esordio de' suoi elementi, i punti considerati come luoghi di punti, le linee di linee, le superficie di superficie ed i solidi di solidi —; altri sono διεξοδικοί (***progredienti***), come le linee considerate quali luoghi di punti, le superficie di linee ed i solidi di superficie; altri finalmente sono ἀναστροφικοί (***rientranti***) come le superficie considerate quali luoghi di punti ed i solidi di linee.

Quanto ai lemmi dei *Luoghi piani* di Apollonio, alcuni sono — come rilevò Chasles (3) — legati alla relazione generale fra quattro punti di una retta che Simson scoperse un secolo fa e che a tòrto porta il nome di Stewart (4):

$$\overline{AD}^2 \,.\, BC + \overline{BD}^2 \,.\, CA + \overline{CD}^2 \,.\, AB + BC \,.\, CA \,.\, AB = 0:$$

(1) Alludiamo a quelle di Annibale Giordano (cfr. il mio lavoro sopra ***Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce***, Genova, 1892, p. 50-55) e G. F. Malfatti inserite nel T. IV (1788) delle *Memorie della Società Italiana delle Scienze*.

(2) *Pappo ed. Hultsch*, p. 660-662.

(3) *Aperçu historique*, p. 42.

(4) Cantor, *Vorlesungen*, III Bd. (Leipzig, 1899), p. 528.

infatti le Prop. 119-124 di Pappo ne sono corollari e le 125-126 semplici trasformazioni: va notata la relazione $\overline{\beta\alpha}^2 + \overline{\alpha\gamma}^2 = 2(\overline{\alpha\delta}^2 + \overline{\gamma\delta}^2)$ fra i tre lati di un triangolo $\alpha\beta\gamma$ e la mediana $\gamma\delta$, che Simson generalizzò tanto notevolmente nella sua divinazione dell' opera di Apollonio (v. L. II, Appendice, n. 14).

Di importanza ancor maggiore sono dotati i trentotto lemmi di Pappo sui *Porismi,* di cui ventitre concernono figure rettilinee, sette il rapporto anarmonico di quattro punti e otto il circolo: esponiamo il contenuto dei principali (1). La Prop. 129 insegna la costanza del rapporto anarmonico dei quattro punti in cui un fascio di quattro raggi è segato da una trasversale: le Prop. 136, 137, 140 e 142 sono casi particolari di quella e della reciproca. La Prop. 130 esprime una relazione fra i segmenti determinati su una trasversale arbitraria dai lati di un triangolo e dalle rette che ne uniscono i vertici ad un punto qualunque del suo piano (ossia dai lati di un quadrangolo completo). L'essere ogni diagonale di un quadrilatero completo divisa armonicamente dalle altre due si apprende dalla Prop. 131, di cui sono casi particolari le Prop. 134 (2), 138, 141 e 143; ed il teorema di Pascal relativo ad una conica degenere dalle Prop. 139, 141 e 143. Le Prop. 134 e 135 vennero generalizzate da Chasles (3); da quelle che portano i numeri 148-153 e 160 si apprendono le proprietà fondamentali dei gruppi annonici, mentre le 154-157, 159 e 161-163 formano la base della polarità rispetto ad un cerchio; finalmente tra la Prop. 157 ed il metodo di Apollonio per determinare i fuochi di una conica è stata recentemente segnalata (4) una relazione assai stretta.

19. I lemmi relativi alle *Coniche* di Apollonio non meritano, nel loro insieme, grande considerazione; ricorderemo soltanto alcuni di essi che si riferiscono alla costruzione di un'iperbola (Prop. 204, 205 e 208), altri esprimenti relazioni metriche più o meno com-

(1) Per più minuti particolari vedi Chasles, *Les trois livres des porismes d' Euclide* (Paris, 1860), p. 75 e seg.

(2) Ivi s'incontra una nuova specie di quadrangolo che Pappo dice, chiamarsi βωμίσκος (ed. Hultsch, p. 878, linea 6.ª).

(3) *Traité de géométrie supérieure* (II ed., Paris, 1880), p. 268 e 249.

(4) Heath, *Apollonius of Perga Treatise on conic sections, edited in modern notations* (Cambridge, 1896), p. XXXIX.

plicate tra punteggiate simili (Prop. 209, 227, 229 e 231), un nuovo semplicissimo problema d'inserzione (l'inserzione cioè entro un angolo di un segmento di data lunghezza parallelo ad una retta data, Prop. 218) ed un teorema (Prop. 221 e 222) che, tradotto in formole, equivale alla nota identità

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} = \operatorname{tg} x + \cot x.$$

Ma ciò che non deve venir passato sotto silenzio è che dai lemmi di Pappo relativi alle *Coniche,* uniti a quelli che leggonsi nelle altre parti della *Collezione,* si traggono gli elementi per giudicare quali progressi abbiano compiuto da Euclide in poi due rami importanti della matematica greca, cioè la Teoria delle proporzioni e l'Algebra geometrica. E poichè è cómpito nostro il descrivere l'evoluzione che essi subirono dall'alba al tramonto della scienza ellèna, analogamente a quanto facemmo parlando di Archimede (L. II, n. 35-36 e 41-42), riassumeremo qui sotto forma algebrica le principali proposizioni esposte da Pappo, non senza aver prima osservato la presenza nella collezione seguente di relazioni di diseguaglianza accanto ad equazioni:

Proporzioni.

Libro III.

Prop. 2. Se $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ e $\frac{a'}{b'} = \frac{b'}{c'} = \frac{c'}{d'}$, e se inoltre $a = a'$ e $b > b'$, sarà $d > d'$.

Prop. 3. Se $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ sarà $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Prop. 4. Se $\frac{a}{b} < \frac{d}{e}$ e $\frac{b}{c} < \frac{e}{f}$, sarà $\frac{a}{c} < \frac{d}{f}$.

Libro VII.

Prop. 3 e 4. Se $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$ sarà $\frac{a+b}{b} \gtrless \frac{c+d}{d}$, ove (qui come in seguito) i segni si corrispondono.

Prop. 6 e 7. Se $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$ sarà $\frac{a}{a-b} \lessgtr \frac{c}{c-d}$ e $\frac{b}{a} \lessgtr \frac{d}{c}$.

Prop. 8 e 9. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ $a > c$ e $b > d$, sarà $\frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b} < \frac{a-c}{b-d}$.

Prop. 11. Se $a > b$ e $c < d$ sarà $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Prop. 16. Se $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$ sarà $ad \gtrless bc$.

Algebra geometrica (1).

Libro III.

Prop. 1. Sussiste l'identità $\frac{x \cdot a}{(x-1)a} = \frac{(x-1)a}{(x-2)a + \frac{a}{x}}$.

Libro V.

Prop. 25 e 26. Identità:

$$2(a+b)b + b(b+c) = \left[(a+b) + (a+b+c)\right]b + b^2$$

$$(b+d)(b-c) + (b-c)^2 = 2b(b-c) + (b-c)(d-c).$$

Libro VII.

Prop. 12. Se $a > x$, $a > y$ e $\frac{x}{a-x} > \frac{y}{a-y}$, sarà $x > y$.

Prop. 13 e 14. Il prodotto di due numeri la cui somma è data, è massimo se i due numeri sono fra loro eguali.

Prop. 15. Se $a + b = c + d$ e $a > c$ sarà $b < d$.

Prop. 23 e 24. Sussiste l'identità: $(a+b)a = (a+b+x)(a-x) + (b+x)x$.

Prop. 31, 57, 58 e 63. Se $x + y = b$ sarà $(a+x)(a+y) = a(a+b) + xy$.

Prop. 65 e 69. Se $(x+a)(x-a) \gtrless (y+b)(y-b)$ secondochè $a \gtrless b$ sarà $x + a \gtrless y + b$.

Prop. 178, 179, 192-194. Identità:

$$(b+2a)b + (a+x)(a-x) = (a+b+x)(a+b-x).$$

(1) Vanno aggiunte quelle proposizioni che riferimmo a proposito della *Sezione determinata* (n. 13), nonchè quelle connesse al teorema di Stewart (n. 14).

Prop. 195. Identità:

$$4a^2 = 2\{(a-x)(a+x) + (a-y)(a+y) + x^2 + y^2\}.$$

Prop. 196. Identità:

$$(a+b-x)^2 + (a+b+x)^2 = (b-x)^2 + (b+x)^2 + 2(a+2b)a.$$

Prop. 197 e 199. Affinchè sussistano le identità:

$$(a+x+y)a + x^2 = (a+x)^2 \quad , \quad (x-a)(y+a) + a^2 = y^2,$$

dev' essere $x = y$.

Prop. 200 e 201. Identità:

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{a+\frac{a^2}{b}}{a-\frac{a^2}{b}} \quad , \quad (b+a)(b-a) = b\left(b-\frac{a^2}{b}\right).$$

Prop. 207. Supposto $(b+c)b = 2c^2$ sarà $b = c$.

Prop. 210. Se $a+b = c+d$ sarà $a-c = d-b$ e viceversa.

Prop. 211. Se $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{p-q}$ sarà $z = x-y$.

Prop. 212. Se $a-c < d-b$ sarà $a+b < c+d$ e viceversa.

Prop. 223. Supposto $a > a'$, $x < a$, $x' < a'$ e $x(a-x) = x'(a'-x')$, sarà $x > x'$.

Prop. 224. Se $x+y = x'+y'$ e $xy = x'y'$ sarà $x = x'$ e $y = y'$.

Prop. 225. Supposto $a > a'$, $b < b'$, sarà $a-b > a'-b'$.

Prop. 226. Se $x' = 2x$ e $y' = 2y$ sarà $x'y' = 4xy$.

Prop. 228. Due quantità son date se son date la somma e la differenza dei loro quadrati.

Prop. 232 e 234. Se $a > x$ da $\frac{a}{a-x} > \frac{b}{b-y}$ segue $\frac{a+x}{a} > \frac{b+y}{b}$; e viceversa.

Prop. 233. Se $\frac{x+a}{x-a} > \frac{y+b}{y-b}$ sarà $\frac{a}{x-a} > \frac{y}{y-b}$.

Libro VIII.

Prop. 14. Se x, y devono soddisfare le equazioni

$$(x-a)(y+a) = k^2 \ , \ (x+a)(y-a) = l^2,$$

x e y saranno dati.

20. Rileveremo ancora nel VII Libro della *Collezione* i lemmi riferentesi ai *Luoghi superficiali* di Euclide; alcuni di essi (Prop. 236-238) insegnano la generazione di una conica mediante un fuoco e la corrispondente direttrice; Pappo se ne servì già nel corso del suo IV Libro (1); secondo un'ipotesi recente (2) egli li avrebbe estratti dai *Luoghi solidi* di Aristeo. Il primo dei lemmi citati è di intelligenza difficile; adottando, come molti fanno (3), l'interpretazione suggeritane da P. Tannery, si dovrebbe intendere che esso esprimesse la proprietà seguente:

" Se una retta AB di lunghezza costante si muove descrivendo coi suoi estremi due rette fisse segantisi nel punto E e trasporta seco una conica di cui essa è un diametro e di cui le corde conjugate si conservano parallele ad una direzione fissa non appartenente al piano delle due rette date, il luogo di questa conica sarà una superficie conica; se le due rette fisse, invece di essere concorrenti, sono parallele, tale superficie è cilindrica ".

Dalle parole di Pappo sembra dedursi che Euclide abbia limitate le proprie considerazioni a tal caso, mentre il commentatore sia assurto alla proposizione generale.

Il Libro VII si chiude col teorema (che non sappiamo a qual opera serva di chiarimento): " Se (fig. 11.ª) sui lati $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ del triangolo $\alpha\beta\gamma$ rettangolo in β si prendono i punti η, ζ in modo che sia

$$\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} = \frac{\alpha\zeta}{\zeta\beta} = \frac{\beta\eta}{\eta\gamma},$$

se si conducono le rette $\alpha\eta$, $\gamma\zeta$ e se ne determina la intersezione ε, la retta $\beta\varepsilon$ riuscirà perpendicolare a $\alpha\gamma$ ".

21. L'ultimo libro della *Collezione* " contiene varî e bei problemi meccanici " ed è pure indirizzato a Ermodoro, figlio di Pappo. Esso comincia con una prefazione interessante ove sono vantati pregi e le applicazioni della Meccanica, ne sono descritte le varie diramazioni e sono citati come principali cultori di essa Archimede da Siracusa, Erone d'Alessandria e Carpo d'Antiochia. Quale intento

(1) Heath, *Apollonius of Perga etc.* (Cambridge, 1896), p. XXXVIII.

(2) *Pappo ed. Hultsch*, p. 284.

(3) Zeuthen, *Die Lehre der Kegelschnitte im Alterthum* (Kopenhagen, 1886), p. 424; Heath, *The Works of Archimedes edited in modern notations* (Cambridge, 1897), p. LXII.

si sia prefisso di raggiungere Pappo nel detto libro emerge dalle seguenti linee della prefazione:

Essendo l'arte meccanica così composta e ripartita, ho ritenuto lodevole per me il riunire quelle cose che gli antichi dimostrarono geometricamente ed esporre in modo migliore di quello adoperato da coloro che scrissero su quest'argomento, più brevemente e più chiaramente quei teoremi che giudicansi utili. Tali cose sono del genere seguente: I. Dato un peso trascinato da una data potenza sopra un piano orizzontale e dato un piano inclinato sull'orizzonte di un dato angolo, trovare la potenza con cui quel peso si può trascinare sopra quel piano inclinato. II. Date due rette diseguali, inserire fra di esse due medie proporzionali. III. In qual maniera si può fare che una ruota, avente un dato numero di denti, venga apposta ad un'altra ruota, avente pure un dato numero di denti, e come si può determinare il diametro della seconda ruota.

Queste parole inducono a giudicare che la meccanica di Pappo sia una disciplina di natura geometrica: tale giudizio preventivo vien confermato tanto dallo studio dell'ultimo libro della *Collezione*, quanto dal riassunto che ora ne esporremo.

Pappo, al pari di Erone (v. L. III, n. 62), ritiene che la teoria dei centri di gravità sia la base di tutta la meccanica, e però debba conoscersi da chiunque imprenda lo studio di questa scienza vuoi con intenti puramente teorici, vuoi in vista delle applicazioni pratiche di cui è suscettibile. E per centro di gravità Pappo (1) intende un punto tale che, sospendendo ad esso il corpo, in modo che non possa moversi se non rotando intorno ad esso, questo si disponga in quiete qualunque sia la sua posizione iniziale; l'esistenza di un tale punto in qualsivoglia solido, anche non geometrico, si trovava dimostrata in opere non più esistenti di Archimede ed Erone, delle quali Pappo si propone di far conoscere le parti meno note (2).

Che la nozione di centro di gravità abbia importanza, non solo nella meccanica, ma anche nella geometria emerge dal seguente teorema dimostrato da Pappo: " Se i lati del triangolo si dividono nel medesimo rapporto, i punti di divisione sono vertici di un secondo triangolo avente comune col primo il baricentro „ (Prop. 2) (3);

(1) Ed. Hultsch, p. 1030.

(2) Id. p. 1034.

(3) Chasles (*Aperçu historique*, p. 44) preferisce enunciarlo come segue: « Se tre mobili percorrono nello stesso senso i tre lati di un triangolo, se i moti cominciano nello stesso istante e le velocità sono proporzionali ai lati relativi, il baricentro del

nel corso della dimostrazione Pappo applica il teorema di Menelao (v. L. III, n. 34) e si affretta poi a dimostrarlo (1) (Prop. 3) ed a far lo stesso per un'altra proposizione ausiliaria (Prop. 4). Egli quindi si volge al problema seguente: " dato (fig. 12.ª) un rettangolo $\alpha\gamma$, condurre in esso una retta $\gamma\delta$ per modo che, sospendendo al punto δ il trapezio $\alpha\beta\gamma\delta$, le rette $\alpha\delta$ e $\beta\gamma$ riescano orizzontali " (Prop. 5), e lo riduce alla determinazione sopra $\beta\gamma$ di un punto λ tale che sia $\overline{\gamma\lambda}^2 = 3\overline{\beta\lambda}^2$ (Prop. 6).

22. Anche la proposizione seguente è geometrica, essendone soggetto una serie notevole di triangoli aventi un angolo comune ed i baricentri situati sopra una stessa retta; invece la Prop. 8.ª concerne la costruzione di un piano inclinato, la 9.ª il *primo* dei problemi meccanici citati da Pappo nella prefazione e la 10.ª (nonchè le 22 e 23) il *terzo* (2). Colla successiva si ritorna invece nel dominio della geometria: essa infatti insegna il seguente procedimento per ridurre ad un'inserzione il problema della ricerca di un cubo che stia ad un cubo dato in un rapporto conosciuto:

Supposto che (fig. 13.ª) $\beta\delta$ sia il lato del cubo dato e $\frac{\beta\delta}{\delta\varepsilon} > 1$ il dato rapporto, si descriva il cerchio di centro δ e raggio $\delta\beta$; sia $\alpha\delta\gamma$ il diametro perpendicolare al raggio $\beta\delta$ e si conduca la corda $\gamma\varepsilon\zeta$: si tracci per α una corda $\alpha\eta\vartheta\varkappa$ tale che il segmento di essa intercetto fra le rette $\zeta\varepsilon$, $\varepsilon\beta$ sia eguale a quello intercetto fra la retta $\varepsilon\beta$ e la periferia del circolo descritto; si avrà allora

$$\frac{\beta\delta}{\delta\varepsilon} = \frac{\overline{\beta\delta}^3}{\overline{\delta\vartheta}^3},$$

onde $\delta\vartheta$ sarà il lato del cubo cercato.

Ad altri e non meno importanti sviluppi geometrici dà luogo un problema che (come osserva Pappo) gli architetti incontrano spesso nella pratica dell'arte loro; consiste nel determinare il raggio della base, supposta circolare, di una colonna cilindrica di cui si

triangolo che ha per vertici quei mobili coincide sempre col baricentro del triangolo dato ». Un teorema analogo sussiste per qualsivoglia poligono; lo notò Montucla nella sua edizione delle *Récréations mathématiques* dell'Ozanam (Paris, 1778) e si verifica con poche linee di calcolo.

(1) Collo stesso metodo che vedemmo adoperato da Tolomeo (L. III, n. 43).

(2) A questo proposito Pappo cita (p. 1060) il celebre detto di Archimede: « da mihi, ubi consistam, et terram movebo ».

conosce un frammento di forma arbitraria (1). Per risolverlo il greco commentatore prende arbitrariamente due punti α, β su questo frammento e, col mezzo del compasso, determina sullo stesso cinque punti $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ i quali siano equidistanti da α e β; essi si troveranno sul piano che biseca ad angolo retto il segmento $\alpha\beta$, onde staranno eziandio sull'ellisse sezione di questo piano colla data colonna, ed è chiaro che l'asse minore di tale ellisse sarà il diametro cercato della colonna. Per trovarlo, Pappo segna su un piano cinque punti Γ, Δ, E, Z, H tali che i triangoli ΓΔE, ΓΔZ, ΓΔH siano eguali rispettivamente ai triangoli $\gamma\delta\varepsilon$, $\gamma\delta\zeta$, $\gamma\delta\eta$; allora l'ellisse suddetta è eguale a quella individuata dai cinque punti ΓΔEZH. Pappo insegna a descriverla (Prop. 13) (2) e ne trova delle coppie di diametri conjugati, in particolare gli assi: così ha raggiunto lo scopo che si è prefisso, percorrendo anzi una strada a cui oggi non si saprebbe suggerire alcun sostanziale miglioramento.

Sorvolando sopra alcune considerazioni di mediocre importanza (ed anche di dubbia autenticità), rileveremo quest'altra questione, a cui Pappo accordò un posto nella *Collezione* grazie alle applicazioni che riceve: " inscrivere in un dato cerchio sette esagoni fra loro eguali, uno dei quali sia concentrico al dato cerchio e gli altri abbiano ciascuno un lato comune con questo e per lato opposto una corda del dato circolo (3) " (Prop. 19). Va da ultimo notato che, ritornando alla fine dell'VIII Libro sulla costruzione delle ruote dentate, Pappo fa cenno dell'elica cilindrica e delle proprietà in essa ravvisate da Apollonio Pergeo (v. L. II, n. 68) e ricordate da Erone (L. III, n. 62). La *Collezione* si chiude con estratti del-

(1) Gli è nel corso di questo problema (p. 1074) che s'incontra quella frase la quale fece credere al Cantor (*Vorlesungen*, T. I, p. 421) che i Greci conoscessero la « geometria con una sola apertura di compasso ». Che ciò non fosse dimostrò il Kutta nella nota *Geometrie mit constanter Zirkelöffnung im Alterthum* (Bibl. mathematica, 1896, p. 16) e poi nella memoria *Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung* (Abh. der k. deutsch. Naturf. Gesell., T. LXXI, Halle, 1897, p. 69-101).

(2) La costruzione di Pappo è esposta in linguaggio moderno da Heath, *Apollonius of Perga Treatise on Conic sections edited in modern notations* (Cambridge, 1896), pagina CLIII e seg.

(3) L'enunciato di questa questione venne certamente ispirato dal teorema — conosciuto dai Pitagorici (L. I, n. 22) — che dice potersi coprire un piano mediante esagoni regolari. Essa equivale alla risoluzione dell'equazione $7x^2 = R^2$.

l'*Elevatore* (L. III, nn. 61-62) del celebre geodeta alessandrino, estratti che costituiscono quanto vi è di veramente meccanico nello scritto di Pappo; in tutto il resto le considerazioni fisiche non entrano che incidentalmente, siccome stimolo o pretesto a considerazioni di pura geometria.

23. Giunti così al termine della nostra analisi, ci sentiamo tenuti a spiegare al lettore perchè ci siamo tanto diffusi sul principale lavoro di Pappo: la ragione è che desso, non soltanto dà un idea di quanto operò questo insigne scienziato, ma, appunto pel suo carattere compilatorio, c'insegna quali problemi interessarono gli scienziati che seguirono quelli del periodo aureo della geometria greca; la *Collezione* è una vera enciclopedia matematica, epperò deve venire descritta nelle varie sue parti da chi intende segnalare tutte le varie direzioni in cui ha proceduto il genio matematico dei Greci: d'altronde essa è l'ultima grande opera che annoveri la matematica greca. Gli altri geometri di cui dobbiamo ancora occuparci sono di gran lunga inferiori a Pappo, e di questo altre opere non conosciamo; vero è che Marino, nella chiusa alla prefazione ai *Dati* di Euclide, dice avere egli chiosata quest' opera (1), che un passo della *Collezione* (2) (confermato dal *Fihrist* (3)) fa conoscere l'esistenza di una illustrazione ad un lavoro sull'*Analemma* (cfr. L. III, n. 46) e che varie informazioni portano a concludere che Pappo fu pure commentatore degli *Elementi;* ma nessuno di questi scritti è giunto completamente sino a noi. Però Proclo ha serbato tre notizie intorno alle osservazioni di Pappo sugli *Elementi* di Euclide.

Una (4) concerne il postulato " tutti gli angoli retti sono fra loro eguali ", e consiste in ciò che l'affermazione reciproca non è sempre vera, se non quando si escludano angoli curvilinei; per dimostrare l'asserto Pappo avvertì l'esistenza di un angolo che, benchè sia eguale ad un angolo retto, pure non si può chiamare tale. S'immaginino infatti due rette fra loro eguali $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ (fig. 14.ª) e perpen-

(1) *Euclidis Opera omnia ed. Heiberg et Menge*, T. VI (Lipsiae, 1896), p. 256.

(2) *Ed. Hultsch*, p. 246.

(3) Infatti ivi si legge riguardo a Pappo: « I suoi scritti sono: Un commento al libro di Tolomeo sulla rappresentazione piana della sfera, tradotto in arabo da Tâbit. Un commento al X libro di Euclide, in due parti ».

(4) *Proclo-Taylor*, T. I, p. 9.

dicolari, e descritti su di esse due semicircoli $\alpha\delta\beta$, $\beta\varepsilon\gamma$; siccome questi sono fra loro eguali, così l'angolo $\delta\beta\alpha$ è eguale all'angolo $\varepsilon\beta\gamma$; se si aggiunge a entrambi l'angolo $\alpha\beta\varepsilon$ si vedrà che l'angolo retto $\alpha\beta\gamma$ è bensì eguale all'angolo curvilineo $\delta\beta\varepsilon$, ma non può considerarsi come retto.

L'altra osservazione di Pappo riferita da Proclo (1) consiste nell'accrescere i postulati di Euclide col seguente: " se a cose eguali aggiungonsi cose diseguali, la differenza fra i risultati ottenuti è eguale a quella fra le cose aggiunte; mentre se a cose diseguali si aggiungono cose eguali, la differenza fra i risultati è eguale a quella fra le cose primitive ".

La terza (2) si trova in una nuova dimostrazione (mediante sovrapposizione) del V teorema del I libro degli *Elementi*.

24. Meno certe, ma più ampie, sono le notizie che ci pervennero intorno a quella parte del commento di Pappo concernente il X Libro degli *Elementi;* esse si attingono da un manoscritto arabo fatto conoscere dal Woepcke (3); ammesso che, come attualmente si ritiene (4), derivi dal lavoro di Pappo e non appartenga ad un astronomo bizantino del II Sec. dell'E. v. (Vezio Valente), come il Woepcke opinava (5), esso completa in modo così notevole le nostre conoscenze sulla matematica greca che esprimiamo il voto che venga tradotto per intero. Servendoci intanto delle informazioni somministrateci dal Woepcke diamo qui un indice di quanto esso contiene.

I Libro. Schizzo storico sullo sviluppo successivo della teoria delle quantità irrazionali presso i Greci. 2. Del finito e dell'infinito come principî della commensurabilità e dell'incommensurabilità. 3. Sguardo alla distribuzione delle proposizioni del X Libro. 4. Differenze tra il rapporto di due quantità finite in generale, quello di due quantità commensurabili e quello di due quantità razionali. 5. Della triade come origine delle quantità irrazionali. 6. Esame comparativo della teoria di Teeteto e di quella di Euclide sulle quantità commensurabili in lunghezza ed in potenza od in potenza soltanto. 7. Dell'esistenza reale delle quantità commensurabili nelle cose

(1) Id. T. II, p. 16.

(2) Id. p. 53-54.

(3) Cfr. l'*Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius etc.* (Mém. des Sav. Étr., T. XIV, 1856, p. 553-568) già citato nel n. 69 del L. II.

(4) Quest'opinione, emessa dall'Heiberg (*Litteraturgesch. Studien über Euklid*, Leipzig, 1882, p. 170; e *Apollonii Pergaei quae graece extant*, Vol. II, Lipsiae, 1888, p. 119), fu giudicata favorevolmente dal Tannery (*Géom. grecque*, p. 143).

(5) In ciò il Woepcke è seguito dal Cantor (*Vorlesungen*, T. I, p. 332 e 396 della 2.ª ed.), mentre è validamente combattuto dal Suter (v. la nota 93 al *Fihrist*).

materiali. 8. Principî metafisici (Dio e la materia) della commensurabilità e dell'incommensurabilità. 9. Le linee razionali esistono per convenzione e non naturalmente. Esistono linee razionali commensurabili in lunghezza e ciò non ostante incommensurabili in lunghezza alla linea proposta come razionale. 10. Differenti opinioni di Platone ed Euclide sulla definizione delle linee razionali. Classificazione delle linee razionali. 11. Dello spazio mediale e delle linee mediali. 12. Degli irrazionali formati per addizione e sottrazione e degli sviluppi di cui è suscettibile la teoria di Euclide. 13. Ripartizione del X Libro in tredici sezioni; sommaria indicazione del contenuto di ciascuna.

II Libro. 1. Dell'ordine degli irrazionali; relazioni che esistono tra gl'irrazionali e gli spazi corrispondenti. 2. Della natura del rettangolo compreso fra due rette. 3. Irrazionali formati per addizione. 4. Giustificazione della nomenclatura di Euclide. 5. Teorema. 6. Irrazionali formati per sottrazione; loro affinità con quelli formati per addizione. 7. Nomi degl'irrazionali formati per sottrazione. 8. Generazione degli spazi formati per addizione e sottrazione, 9. Relazione che passa tra i vari generi di irrazionali ed i tre generi di proporzioni. 10. Generazione mediante la proporzione armonica degli irrazionali formati per sottrazione. 11-12. Dimostrazione di un teorema. 13. Le sei rette binomie ed i sei recisi. 14-15. Teoremi. 16. Osservazioni sull'applicazione del quadrato della mediale. Sguardo all'infinità di irrazionali.

Il Woepcke ha data la traduzione francese dei cap. 10 e 12 del I Libro e dei cap. 1 e 16 del II, nonchè un sunto del cap. 10 di questo. Di tutti, quello che sembraci più interessante, è il cap. introduttorio; anzi tante conferme esso porge a quanto dicemmo sullo svolgimento della teoria degl'irrazionali che lo riferiamo qui come epilogo a questa parte del nostro lavoro:

Lo scopo del decimo Libro del trattato di Euclide sugli elementi è lo studio delle quantità commensurabili ed incommensurabili, razionali ed irrazionali.

Questa teoria nacque nella scuola di Pitagora. Fu considerevolmente svolta da Teeteto Ateniese, il quale diede prova, in questa parte delle matematiche, come in altre, di una sagacia che gli procurò una giusta ammirazione. Inoltre egli era uno degli uomini più felicemente dotati, e si consacrava, con un nobile ardore, alla ricerca delle verità contenute in queste scienze, come Platone lo testimoniò nell'opera che intitolò col suo nome. Quanto alle distinzioni esatte delle quantità suddette, ed alle dimostrazioni rigorose delle proporzioni a cui dà luogo questa teoria, io credo che furono stabilite principalmente da questo matematico; e più tardi, il grande Apollonio, il cui genio conseguì nel più alto grado la superiorità nelle matematiche, aggiunse, con molti sforzi e lavori, delle teorie ammirande.

Giacchè Teeteto aveva distinto le potenze commensurabili in lunghezza dalle incommensurabili ed aveva classificate le specie conosciutissime delle linee irrazionali in base alle varie medietà (proporzioni) assegnando le mediali alla geometrica, i binomî all'aritmetica e gli apotomi all'armonica, come riferisce e racconta Eudemo Peripatetico. Quanto ad Euclide, egli si propose di dare regole rigorose che egli stabilì relativamente alla commensurabilità ed all'incommensurabilità in generale; precisò le definizioni delle quantità razionali ed irrazionali, espose un grande

numero di specie di quantità irrazionali e da ultimo ne dimostrò chiaramente la estensione.

Finalmente Apollonio distinse le specie degli irrazionali *ordinati*, e scoprì la dottrina delle quantità irrazionali dette *non ordinate*, di cui egli costruì un grande numero con metodi esatti.

IV.

Il Neo-Platonismo. — Proclo, Marino, Simplicio.

25. La mancanza di notizie intorno alla vita di Pappo è in contrasto stridente coll' abbondanza di particolari intorno a quella dell' altro commentatore che ci servì di costante ausiliare nella nostra narrazione: Proclo.

Ma prima di parlare di lui (per uniformarci al costume a cui ci attenemmo sempre, e specialmente nel nostro I Libro) bisogna che indichiamo brevemente in qual maniera sorse e si sviluppò la setta filosofica a cui egli appartenne, scuola che, benchè non abbia prodotta alcuna grande opera matematica, pure non è assolutamente priva di benemerenze per le scienze esatte (1). Alludiamo alla setta dei Neo-platonici. La quale, se vanta come suo progenitore Ammonio Sacca (m. nel 242 circa), ha come vero fondatore Plotino (nato a Licopoli in Egitto, nel 204 o 205 dell' E. v.). Ora questi, dopo avere ascoltate per undici anni le lezioni che Ammonio teneva in Alessandria, nel 244 o 245 si trasferì a Roma, ed ivi gettò le basi di una scuola che ben presto salì in alta rinomanza e della quale egli tenne la direzione sino alla propria morte (270 dell' E. v.). Le numerose sue opere vennero pubblicate da Porfirio (nato a Tiro nel 232 o 233, morto a Roma il 301 dell' E. v.), commentatore di cospicuo valore (2) al quale si deve — oltre una *Vita di Pitagora* ed un commento alla *Musica* di Tolomeo — la conservazione e la diffusione delle idee di Plotino (3). La tradizione

(1) Oltre a quanto esporremo in questo Cap., si vegga il n. 36 del L. V.

(2) In *Suter-Fihrist*, p. 10 è fatto menzione di un suo libro su gli *Elementi* (di Euclide?).

(3) Che egli siasi occupato di geometria, e precisamente di commentare gli *Elementi*, emerge da quattro o cinque citazioni di Proclo: sono queste anzi che indussero P. Tannery (*Le géom. grecque*, p. 25) a supporre che egli abbia composto un commento ad Euclide più tardi utilizzato da Pappo; a questo Proclo avrebbe ricorso nel redigere le proprie illustrazioni ai teoremi di Euclide.

neo-platonica viene continuata, dopo Porfirio, da Giamblico (nato a Calcide, vissuto forse in Siria) (1). Ma anche dopo la di lui morte, accaduta verso il 330 dell'E. v., il neo-platonismo non si spegne: basti infatti ricordare che Ipazia (cfr. L. III, n. 50), la sventurata figlia di Teone, la gentile commentatrice di Apollonio e Diofanto, trovavasi a capo di una scuola che da Platone prendeva ispirazione e nome. Nè basta: gli studî sopra Aristotele, compiuti a Bisanzio nella seconda metà del VI Sec., riconducono i filosofi ad occuparsi di Platone, sicchè al principio del secolo veniente, nella patria stessa di questo, troviamo un gruppo di studiosi che meditano sulle sue opere, le commentano e pubblicamente ne professano le dottrine. A Plutarco, figlio di Nestore (e che non deve identificarsi col noto autore delle *Vite parallele*), al di lui successore Siriano, e più ancora a Proclo, le dottrine neo-platoniche sono debitrici del loro assetto definitivo: ed è principalmente alla presenza di Proclo fra i rinnovatori della filosofia platoniana che questi debbono la menzione che di essi facemmo.

La vita di Proclo ci è nota con grande precisione grazie ad una entusiastica biografia scritta da un ammiratore e discepolo — Marino da Neapoli — il quale vedeva in Proclo il tipo dell'uomo fisicamente, moralmente ed intellettualmente perfetto. Marino ci fa conoscere come egli nascesse a Bisanzio nel 410 dell'E. v. da Patrizio e Marcella " uniti legalmente in matrimonio ". I parenti di Proclo erano licii di stirpe, e nella Licia (a Zante) egli venne portato bambino (2). Più tardi il futuro neo-platonico andò ad Alessandria ove ebbe a maestri il retore Leonas ed il grammatico Orione, e non trascurò di frequentare le scuole dei Romani; ritornato colà più tardi, dopo un viaggio a Bisanzio in compagnia di Leonas, Proclo si dedicò alla filosofia sotto la direzione di Olimpiodoro ed Erone (non il meccanico), e vi fece tali progressi che da Bisanzio gli fu consigliato di andare ad Atene per restaurare le dottrine di Platone. Tale suggerimento egli seguì; ad Atene divenne discepolo

---

(1) Un passo di questo scrittore ove si parla una certa « linea a doppio movimento » (*Comment. in Aristotelis Phys.*, ed. Diels, p. 60) venne interpretato dal Tannery (*Pour l' hist. des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité*, § 2, Bull. des Sc. math., 2.ª Serie, T. VIII, 1884) come indicazione che gli antichi abbiano conosciuta la cicloide.

(2) Perciò spesso egli è indicato col nome di Proclo Licio.

di Siriano, ad Atene rimase sempre, tranne durante un viaggio in Lidia; succedette al suo maestro (1) e spirò il 17 aprile 485. Non ebbe moglie nè lasciò figliuoli, al pari di Pitagora fu vegetariano, e, se si presta fede a Marino, alla sua morte ebbe onori quali si concedono soltanto ai cittadini più illustri.

26. Il biografo di Proclo, mentre è sì prolisso nel riferire quanto concerne la vita del suo eroe, ci dà notizie assai scarse ed imprecise sulle sue opere: sicchè da lui non si apprende che l'esistenza di un lavoro sul *Teeteto* di Platone, e di un commento al *Timeo,* scritto a vent'otto anni ed a cui l'autore attribuiva grande valore. Esso esiste in fatto e fu pubblicato sin dal 1556 (2). Nelle stesse condizioni si trovano un riassunto dell'*Almagesto* intitolato *Ipotiposi* (stampato nell'originale nel 1540 e l'anno appresso in latino), un trattato sulla *Sfera,* tolto integralmente dai Cap. II, III, IV e XII dell'*Introduzione ai fenomeni* di Gemino (la prima edizione di esso risale al 1553), ed un commento al poema di Esiodo sopra *Le opere ed i giorni* (stampato nel 1603).

Non queste opere astronomiche e tanto meno quelle filosofiche devono venir qui considerate; lo merita soltanto il *Commento agli Elementi di Euclide,* e lo merita indiscutibilmente perchè fa conoscere ed insegna a misurare i tentativi fatti dagli antichi per rassodare le basi o completare la cima dell'edificio geometrico. Trattiamone dunque cominciando da quella parte concernente il I Libro e che sola ci pervenne nella sua integrità (3). E notiamo anzitutto che, se per spiegare un autore è condizione essenziale il condividerne le idee, Proclo si trovava in una situazione assai sfavorevole al rag-

(1) A questo fatto devesi se a Proclo si dà spesso l'epiteto di διάδοχος (successore).

(2) Questa e le seguenti notizie vengono tolte da *Proclo-Taylor*, T. I, p. 34 e seg.

(3) Il *Commento* di Proclo apparve la prima volta stampato in seguito all'edizione degli *Elementi di Euclide* fatta a Basilea da Simone Grynaeus nel 1533. Essa servì di fondamento per la traduzione latina fattane dal Barozzi (*Procli Diadochi Lycii philosophi ac mathematici probatissimi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarium,* Padova, 1560), il quale però ne migliorò il testo mediante cinque manoscritti; da questa traduzione derivò poi quella inglese del Taylor, tante volte da noi citata. A quell'edizione del testo attinsero Commandino e Clavio, Camerer e Hauber, nonchè infiniti altri studiosi di Euclide; tutti però ne riconobbero le deficienze e ne augurarono una migliore: il voto generale fu soddisfatto dal Friedlein nel 1873 (v. L. I, n. 3). Per ulteriori ragguagli rimandiamo a L. Majer, *Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid* (Tübingen, 1875) e Heiberg, *Litterargesch. Studien,* p. 164-165.

giungimento del fine che si era proposto, giacchè le idee filosofiche di cui era impregnato dovevano essergli di ostacolo a che egli coadiuvasse Euclide nella sua opera di espurgazione della geometria da considerazioni ad essa estranee. Ed infatti si può dire che Proclo procedette in una direzione diametralmente opposta a quella scelta dal sommo alessandrino: mentre questi aveva pronunciata una sentenza di divorzio tra matematica e filosofia, Proclo propugnò la loro riconciliazione. La sua voce non rimase inascoltata, anzi le sue idee ebbero corso fino al momento in cui un risveglio dell'assopito spirito d'indagine nel campo della geometria rivelò la necessità di un nuovo distacco di quelle due scienze l'una dall'altra.

27. Qual è il metodo adottato da Proclo nel comporre il suo *Commento?* Ce lo dice egli stesso: sceglie a guida Platone ed invoca l'ajuto di tutti coloro che gli possono riuscire utili.

Quali scritti egli utilizzò? La questione è ardua (1); adottando il parere, assai verosimile, di colui che più d'ogni altro studiò Proclo con acume e profondità (2), Proclo nella parte filosofica del suo *Commento* avrebbe parlato in nome proprio, ma per le considerazioni matematiche si sarebbe servito principalmente di Gemino, Porfirio e Pappo, non di Erone (3), ma per converso di un gruppo mal noto di scritti rappresentante la tradizione matematica della scuola Pitagorica (4).

(1) Un primo tentativo per risolverla è rappresentato dall'opuscolo di J. H. Knoche, *Untersuchungen über des Proklus Diadochus Commentar zu Euclids Elementen* (Herford, 1862). Ad essa è dedicata gran parte dell'opera del Tannery su *La géométrie grecque.*

(2) Tannery, op. cit., p. 24 e seg.

(3) Id. p. 176. Il non avere Proclo utilizzato Erone sembra essere smentito dal commento di Anarizio, ove, come vedemmo a suo tempo (L. III, n. 69), si trovano, come pensieri eroniani, certe osservazioni che si leggono, senza indicazione della fonte, nel *Commento* di cui ci stiamo occupando.

(4) A complemento di queste notizie diamo qui l'elenco dei nomi ricordati da Proclo: Ameristo, Amfinomo, Amicla, Anassagora, Androne, Apollonio, Archimede, Archita, Aristotele, Ateneo, Carpo, Crasisto, Crisippo. Ctesibio, Dinostrato, Enea, Eratostene, Ermotimo, Erone, Euclide, Eudemo, Eudosso, Filippo, Filolao, Filone, Gemino, Ippocrate da Chio, Ippocrate da Cos, Leodamante, Leone, Menecmo, Menelao, Neoclide, Nicomede, Oinopide, Pappo, Parmenide, Perseo, Pitagora, Platone, Plutarco, Porfirio, Posidonio, Siriano, Speusippo, Stesicoro, Socrate, Talete, Teeteto, Teodoro, Teudio, Tolomeo, Zenocrate, Zenodoro, Zenodoto e Zenone. Tutti questi personaggi hanno il loro posto nella nostra storia, eccettuati Androne, Crasisto, Enea e Zenone (epicureo da Sidone), sui quali le

In qual modo si servì Proclo degli scritti anteriori? (1). Sembra li saccheggiasse così impudentemente da appropriarsene, non soltanto le idee, ma perfino le parole; la sua principale vittima sembra essere stato Gemino, da cui probabilmente tolse due brani assai interessanti, che noi già conosciamo, cioè lo schizzo sulla storia della geometria (L. I, n. 3), e le notizie bio-bibliografiche su Euclide (L. II, n. 4).

28. Il *Commento* di Proclo al I Libro di Euclide consta di quattro libri. L'autore comincia rilevando quale parte fondamentale la matematica rappresenti nel sistema filosofico di Platone; si diffonde poi sopra i principî comuni alle varie branche di essa, esprimendo l'opinione che questi principî universali devono dar materia ad una scienza generale; cerca quale facoltà della mente costituisce il criterio in matematica e si sforza di determinare il carattere ideale ed aprioristico degli oggetti della scienza matematica. Segue l'elogio di questa, la dimostrazione dell'utile che da essa traggono altre discipline e la confutazione di coloro che la pregiano esclusivamente per la sua pratica utilità; Proclo combatte poi l'affermazione di Aristotele " colui che è dotto in tutte le scienze può giudicare di tutto, mentre colui che è abile soltanto nelle matematiche è soltanto in grado di determinare le relazioni che ivi si presentano ". La divisione della matematica che proposero i Pitagorici — e che noi riferimmo nel n. 2 come appartenente a Gemino — e quella in uso fuori della loro scuola, nonchè alcune notizie intorno all'unità della matematica ed alle ragioni che indussero i Pitagorici ad imporle il nome che essa porta, chiudono il I Libro del *Commento* di cui ci occupiamo.

In principio del II Libro Proclo assegna alla Geometria un posto in tutto lo scibile, inferiore, ma immediatamente successivo, a quello occupato dall'Aritmetica: opinione questa che, grazie a Gauss e Grassmann, Weierstrass e Kronecker, è oggi generalmente considerata per vera. Seguita poi occupandosi della questione — dibattuta a più riprese anche nell'epoca moderna — se gli oggetti della Geometria appartengano all'intelligibile od al sensibile, e la risolve in

informazioni d'altra origine sono pressochè nulle; notiamo soltanto che Enea (da Jerapoli) scrisse un compendio degli *Elementi* (*Proclo-Taylor*, T. II, p. 150), ove parecchi teoremi di Euclide si trovano fusi in un solo.

(1) Cfr. anche le osservazioni esposte nel L. I, nn. 4 e 7.

senso contrario a quello oggi preferito, assegnandoli cioè all'intelligibile.

Proclo s'industria quindi a determinare con esattezza i caratteri distintivi della Geometria, non senza additare gli stretti rapporti che essa ha coll'Aritmetica; sopra una digressione, infiorata di aneddoti concernenti Archimede, per dimostrare l'utilità della geometria, non è il caso di arrestarci; il brano che viene poi fu da noi già integralmente riferito (L. I, n. 3). In seguito il commentatore espone una folla di informazioni ed osservazioni sul significato e l'uso delle parole " elementi „ ed " elementari „, problemi e teoremi, ipotesi, postulati e definizioni, ed afferma che l'intento che si propose Euclide nel I Libro degli *Elementi* è di insegnare i principî della teoria delle figure rettilinee, cioè dei triangoli (prima parte del detto Libro), dei parallelogrammi (seconda parte) e dei triangoli e parallelogrammi considerati insieme (terza parte).

Qui ha termine la parte esclusivamente filosofica del *Commento;* chè a partire da questo punto Proclo esamina tutte le proposizioni esposte da Euclide, spiegandole ed illustrandole con osservazioni proprie o di altri; precisamente al termine del II Libro egli tratta delle *definizioni* (1), nel III si occupa degli *assiomi,* dei *postulati* e delle prime ventisei proposizioni, e nel IV delle rimanenti. Di quanto egli dice noi già traemmo grande profitto, anzi ne riferimmo degli interi brani (cfr. L. I, n.[i] 22, 24, 26, 28 e 33; L. II, n. 27 nota); ora aggiungeremo qualche notizia che non ci accadde di riferire prima. Così val la pena di notare che Epicurei e Pirroniani ritenevano che la Geometria non avesse basi di indiscutibile solidità (2) e che i primi dicevano che il teorema " in ogni triangolo la somma di due lati è minore del terzo „ (*Elementi* I, 20) " riuscirebbe evidente anche ad un asino, e non ha bisogno di dimostrazione „, ed aggiungevano che " è proprio agli ignoranti il considerare meritevoli di dimostrazione le cose evidenti, e accordare il proprio assenso a quelle che sono ignote e di per sè non evidenti „ (3).

(1) Cfr.: Knoche et Maerker, *Ex Proclis Successoris in Euclidis Elementa def. quartae expositio* etc. (Herfordiae, 1856), L. Majer, *Proklos über die Definitionen bei Euklid, I Theil, Definitionen 1-7* (Stuttgart, 1881).

(2) *Proclo-Taylor,* T. II, p. 17-18.

(3) Id. T. II, p. 115.

Nè va taciuto il nome speciale di *omeomere* (1) adoperato dagli antichi per indicare le linee che (come la retta, la circonferenza, e l'elica cilindrica) sono identiche nelle loro parti. Da ultimo rileveremo il metodo, di cui parla Proclo nel commento alla IV def. di Euclide, per tracciare meccanicamente un' ellisse mediante un segmento i cui estremi descrivono due rette concorrenti; fu desso inventato da Proclo? Noi incliniamo a negarlo; tuttavia andava quì notato il primo cenno che di esso si trova nella letteratura matematica dei Greci.

In tutto il suo scritto Proclo sparse a piene mani le notizie storiche; di ciò gli va data lode, a far questo egli fu bene ispirato perchè esse trasformarono il suo *Commento* nella principale fonte di informazioni intorno alla geometria greca; il larghissimo uso che ne facemmo noi pure ci dispensa dal trattenerci ora più a lungo su di esso.

29. Abbiamo già fatto allusione ad un proseguimento del *Commento* di Proclo oltre al I Libro degli *Elementi*. Proclo ne parla chiaramente in varie occasioni, annunciando lo sviluppo ulteriore che avrebbero ivi trovate certe considerazioni (2); ed il suo divisamento è confermato da uno scolio recentemente trovato (3). Che tale progetto abbia avuto almeno una parziale attuazione è dimostrato da alcuni frammenti non ha guari scoperti in un codice vaticano (Urbin. 71) ed in uno milanese (Ambros. I, 84, infer. n. 7) (4); ma alla domanda, che naturalmente si affaccia, " il commento di Proclo estendevasi a tutta l'opera di Euclide e nelle medesime proporzioni? „ non abbiamo modo di rispondere. Ammessane l'esistenza, la perdita di esso è altamente deplorevole; giacchè, anche chi neghi

(1) Id. T. I, p. 129.

(2) Così in un punto (*Proclo-Taylor*, T. II, n. 181) egli promette di dimostrare che « tra tutte le figure isoperimetre, il quadrato è massimo ed il romboide (?) è minimo ».

(3) Wachsmuth, *Handschriftliche Notizen über den Commentar des Proklus über die Elementen des Euklides* (Rhein. Museum für Philol., T. XVIII, 1863, p. 132-135). Cf.: J. H. Knoche, *Untersuchungen über die neuen aufgefundenen Scholien der Proklus Diodokus zu Euclids Elementen* (Herford, 1865), p. 52, e Heiberg, *Litt.-gesch. Studien* etc., p. 167-8.

(4) V. il lavoro citato testè del Knoche. L'Heiberg inclina però ad attribuirlo a Pappo (v. *Philologus*, T. XLIII, 1884, p. 332).

a Proclo qualsia valore come matematico non può non riconoscere che egli era l'uomo indicato per somministrarci quelle informazioni intorno allo svolgimento della geometria elementare e complementare dopo Euclide, delle quali ci è così sensibile la deficienza confinante coll'assoluta mancanza.

30. Proclo segna l'apogeo del neo-platonismo, chè fra coloro i quali ne professarono le dottrine cercheremmo invano una persona a cui qualche ramo di scienza sia debitrice di rilevanti progressi; ciò non ostante tra i posteriori che cercarono di calcare le orme di Platone, tre meritano quì almeno una menzione fugace.

Il primo è Marino da Neapoli (1) (nato a Flavia Neapolis, città della Palestina), biografo di Proclo (2) ed autore di un'edizione dei *Dati* di Euclide, preceduta da una prolissa prefazione (3), destinata specialmente a chiarire che cosa sia un *dato,* di che utilità riesca ed a quale scienza si riferisca, e nella quale sono ricordati — oltre Euclide, Apollonio, Tolomeo — Pappo ed un Diodoro, matematico che visse ad Alessandria alla fine del I Sec. a. C.

A Marino segue Isidoro di Alessandria, il quale fu maestro di quel Damascio da Damasco (v. L. II, n. 31) a cui si volle attribuire il cosidetto XIV Libro degli *Elementi* di Euclide; egli fioriva circa nel 510 dell'E. v.

Contemporaneamente a Damascio professò in Atene Simplicio, famoso specialmente come illustratore di Aristotele (v. L. I, n. 40), ma che commentò eziandio gli *Elementi* di Euclide (4). Tale pagano

(1) Non da Napoli come erroneamente scrisse una volta il Montucla (*Hist. des Math.*, T. I, p. 215).

(2) Dell'elogio scritto da Marino, il Taylor pubblicò una versione inglese (*Proclo-Taylor,* T. I, p. 1-33).

(3) *Euclidis Opera omnia* ed. Heiberg et Menge, T. VI (Lipsiae, 1896).

(4) Di tale commento esistono traccie in un autore Arabo che già ci è accaduto di citare (v. *Codex Leidensis* 399,1 ed. Besthorn et Heiberg, Hauniae 1893 e 1897, p. 9, 13, 17, 19, 21, 27, 29, 119, 131). Ma un altro codice, di cui il Curtze ha annunciata e poi curata la pubblicazione (cfr. l'articolo *Alcuni manoscritti relativi alla geometria greca* nel *Bollettino di bibl. e storia delle scienze matematiche.* 1898, p. 157-158; *Anaritii in decem libros priores Element. Euclidis Commentarii,* Lipsiae, 1899), contiene completamente la parte del commento di Simplicio relativo alle definizioni del I Libro; i passi relativi si trovano facilmente servendosi dell'indice di nomi con cui si chiude l'ed. del Curtze, e mostrano che le osservazioni di Simplicio sono piuttosto verbali che sostanziali, piuttosto filosofiche che matematiche; esso non ha nemmeno il pregio di fornire notizie

insegnamento sembra incorresse nel biasimo dell'imperatore Giustiniano (allora in procinto di passare al Cristianesimo) il quale nel 529 decretò la chiusura della scuola di Atene. Così finì in Grecia il neo-platonismo (1); così venne violentemente spenta l'ultima fiammella che attestava come nella patria di Pericle vi fosse ancora qualcuno che s'interessava alla ricerca ed almeno alla contemplazione del vero (2).

V.

Eutocio.

31. Fra le autorità del tempo antico che invocammo più di frequente a sostegno delle nostre asserzioni l'ultimo posto, vuoi per l'epoca a cui appartiene, vuoi pel valore che possiede, va conferito ad Eutocio. Il quale deve avere appartenuto ad una ricca famiglia di Ascalona (città della Palestina) ed avere annoverato fra i suoi antenati un mercenario della Tracia, nomato pure Eutocio, di cui Suida ha conservata la storia poco edificante. Gli elementi per determinare l'epoca in cui visse si traggono dall'osservare che egli non è citato da alcuno dei geometri in cui ci siamo sino ad ora imbattuti, e notando le persone a cui egli dirige i proprî lavori (3) o che egli cita in questi (4). Venne specialmente sfruttata la di-

---

intorno a ricerche anteriori: così è da lamentare che Simplicio siasi limitato a citare (v. p. 35 e 65), senza riferirle, alcune indagini sul postulato di Euclide dovute ad un certo Abtiniate, personaggio assolutamente ignoto, e ad un Diodoro, che P. Tannery crede (*La géom. grecque*, p. 175) essere lo stesso matematico alessandrino poco dianzi citato.

(1) Più tardi, sott'altro cielo, il neo-platonismo risorse: Manlio Severino Boezio sta ad attestarlo.

(2) La fine dell'Università Ateniese è circa contemporanea al principio di quella Costantinopolitana; questo istituto in origine fu estraneo alle scienze, ma poi queste vi penetrarono: lo prova la presenza ivi nel VII Sec. di Stefano di Alessandria (cf. *De Stephano Alexandrino Hermanni Useneri Commentatio*. Bonn, 1880).

(3) Sono il filosofo Ammonio discepolo di Proclo, il meccanico Antemio di Tralle ed un certo Pietro.

(4) Sono: Apollonio, Arcadio, Archimede, Archita, Aristotele, Antifonte, Diocle, Dionisidoro, Eraclide, Eronas, Erone, Eudemo, Eudosso, Eratostene, Filone, Gemino, Isidoro, Ippocrate da Chio, Magno, Menecmo, Nicomaco, Nicomede, Pappo, Poro, Platone, Sporo, Teodosio, Teone, Tolomeo. Tutti questi pensatori sono noti al lettore della pre-

chiarazione di Eutocio di adoperare, ne' suoi commenti ad Archimede, l'edizione fattane da Isidoro da Mileto (1): interpretandola in un certo modo si concluse (2) che Eutocio, essendo stato discepolo del celebre architetto della chiesa di S.ta Sofia a Costantinópoli, fiorì intorno al 550 dell'E. v.; ma poichè quell'interpretazione ha qualche cosa di arbitrario e dà luogo a certe difficoltà, il Tannery (3) propose di fare un po' retrocedere l'epoca del nostro commentatore fissandone la nascita circa al 480 dell'E. v. Dall'accettare l'una piuttosto che l'altra di queste determinazioni cronologiche non dipende il giudizio che devesi formulare sull'opera scientifica del chiosatore ascalonita.

Eutocio, oltre un commento, oggi perduto, a Tolomeo, ne compose in giovane età sopra alcuni lavori di Archimede, vale a dire sopra gli scritti *Su la sfera ed il cilindro* (L. II, n. 38-9), *Su la misura del circolo* (L. II, n. 43) e *Su l'equilibrio dei piani* (L. II, n. 36), e più tardi sui primi quattro libri delle *Coniche* di Apollonio (4); negli studî sul Siracusano si servì di una edizione fatta per cura o sotto la direzione di Isidoro da Mileto, ma in quelli sopra il Pergeo di una propria. Esamineremo ora questi commenti e ne diremo il contenuto con studiata brevità, avendo noi ad essi

---

sente storia; va fatta eccezione soltanto per Arcadio, citato fugacemente assieme a Pappo e Teone (*Archimede* ed. Heiberg, T. III, p. 140), per Poro, critico ingiusto di Archimede. che sembra doversi identificare con Sporo di Nicea, per Magno oscuro autore di una logistica (id. p. 302) appartenente al IV o V Sec. (v. Hultsch, *Zur Kreismessung des Archimedes*, Zeitschr. für Math. und Phys., T. XXXIX, Hist.-lit. Abth., p. 113, nota), e per Eronas, commentatore di Nicomaco, che il Martin (*Recherches sur Héron*, p. 240) identificò arbitrariamente con quell'Erone da Costantinopoli che fu maestro a Proclo (v. n. 25).

(1) Archimede ed. Heiberg, T. III, p. 260 e 302.

(2) Halley (esordio alla sua ed. di Apollonio) fa fiorire Eutocio sotto Giustiniano. Cf. Heiberg, *Ueber Eutokius* in *Phil. Studien zu griech. Mathematikern* I (Leipzig, 1880).

(3) *Eutocius et ses contemporains* (Bull. des Sciences math., 2.e Serie, T. VIII, 1884).

(4) Concordano con queste notizie di fonte greca le notizie del *Fihrist*, ove si legge: « Egli (Eutocio) compose: un commento al I Libro di Archimede *Su la sfera ed il cilindro*. Il libro delle due linee; ove tutto è dimostrato mediante i principî dei matematici filosofi; fu tradotto in arabo da Tâbit e fu trovato ottimo. Un commento al libro di Tolomeo sull'astronomia giudiziaria (de judiciis astrorum) ». Ha egli scritto anche un commento a Pappo come affermano gli editori del carteggio di Huygens (*Oeuvres complètes de C. Huygens*, T. II, 1889, p. 359 nota)?

già attinte le più preziose informazioni storiche ed essendo ivi completa l'assenza di concetti originali e di nuove proposizioni (1).

32. Nel commento al I Libro di Archimede *Su la sfera ed il cilindro* non troviamo da rilevare altro se non che Eutocio avverte nella proposizione " la linea retta è il più breve cammino tra due punti ", il significato di postulato, non quello di definizione che le attribuì a torto Proclo (2). Nella II prop. del II dei libri succitati Archimede adopera l'inserzione di due medie proporzionali fra due rette; ma, contrariamente a quanto avrebbe fatto un fedele seguace di Euclide, non si arresta ad insegnare come si effettui; ora a tale silenzio supplisce Eutocio. Il quale, dopo di avere riferito la lettera in cui Eratostene narra a Tolomeo Evergete le origini favolose del problema di Delo (L. I, n. 42), espone i metodi a lui noti per risolverlo, escludendo soltanto quello di Eudosso (v. L. I, n. 73), da lui ritenuto errato. Questi metodi sono per la maggior parte a noi noti; sono infatti quello di Platone (L. I, n. 62), quelli fra loro analoghi di Apollonio (L. II, n. 68) e di Erone (L. III, n. 61), quello, dovuto a Diocle (L. II, n. 73) e ritrovato da Pappo (3) e Sporo da Nicea (4), nonchè i procedimenti di Menecmo (L. I, n. 76), Archita (L. I, n. 51), Eratostene (L. II, n. 49) e Nicomede (L. II, n. 72). Resta soltanto da aggiungere un cenno intorno al metodo suggerito da Filone da Gadara, noto meccanico del I Sec. a. C.:

Le due rette $\alpha\beta$ e $\beta\gamma$ fra cui si devono inserire le due medie proporzionali siano disposte ad angolo retto (fig. 15ª); si completi il rettangolo $\alpha\beta\gamma\theta$, se ne prolunghino i lati $\theta\alpha$, $\theta\gamma$, e si descriva il semicircolo $\alpha\beta\gamma$ di diametro $\alpha\gamma$. Si conduca poi per β una retta tale che, chiamando $\delta, \varepsilon, \zeta$ le sue intersezioni con la rette $\theta\alpha, \theta\gamma$ e la semicirconferenza anzidetta risulti $\beta\delta = \varepsilon\zeta$. Saranno $\alpha\delta$ e $\gamma\zeta$ le due medie cercate.

Per vedere come questa costruzione sia in sostanza identica a quella di Apollonio ed Erone (e quindi indirettamente dimostrarne l'esattezza), si osservi che (se si indica con $\varkappa$ il centro del rettan-

(1) Ci serviamo delle edizioni fattene dall'Heiberg pubblicando Archimede ed Apollonio.

(2) *Proclo-Taylor*, T. I, p. 133.

(3) *Pappo ed. Hultsch*, p. 1070.

(4) Secondo il Tannery questi sarebbe un maestro di Pappo od un condiscepolo più attempato, autore di una collezione — intitolata Κηρία — ove erano trattati i problemi della duplicazione del cubo e della quadratura del circolo; v. P. Tannery, *Sur les fragments d'Eudème de Rhodes relatifs à l'histoire des mathématiques* (Annales de la Fac. des lettres de Bordeaux, T. IV, 1882, p. 70-76) e *Sur Sporos de Nicée* (Id. p. 257-261).

golo considerato), essendo isoscele il triangolo $\beta\epsilon\kappa$, si ha $\beta\kappa = \epsilon\kappa$ e gli angoli $\delta\beta\kappa$ e $\zeta\epsilon\kappa$ sono eguali; ed essendo inoltre $\beta\delta = \epsilon\zeta$ per costruzione, i due triangoli $\kappa\beta\delta$ e $\kappa\epsilon\zeta$ risultano eguali, in particolare $\kappa\delta = \kappa\zeta$, onde il problema delle due medie è ridotto a quello stesso problema di inserzione che vedemmo presentarsi nelle soluzioni citate.

33. Ricordiamo (L. II, n. 39) ora che nel II dei libri *Su la sfera ed il cilindro* Archimede ridusse il problema di " dividere una sfera in due parti che stiano in un dato rapporto " (Prop. 4) alla risoluzione di un'equazione cubica priva del secondo termine, senza però indicare come condurne a termine la soluzione. Anche questa lacuna è riempita da Eutocio servendosi di considerazioni tolte da un libro di ignoto autore, ma la cui antichità è dimostrata dai nomi di " sezione del cono rettangolo " e " sezione del cono ottusangolo " con cui sono ivi designate una parabola ed un'iperbola; da tali considerazioni noi desumemmo la notizia della soluzione, mediante un ellisse ed un'iperbola, suggerita da Diocle per quel problema di Archimede (L. II, n. 73), ora dedurremo da essa un'altra analoga soluzione, indicata da un tal Dionisidoro, geometra che venne identificato (1) con quel Dionisidoro d'Amisso (Ponto) ricordato da Strabone e Plinio e quindi ritenuto anteriore all'E. v. (2).

Ecco in che cosa consiste il procedimento a cui si allude:

Sia data la sfera di diametro $\alpha\beta$ (3) ed il rapporto dato sia quello di $\gamma\delta$ a $\delta\epsilon$; bisogna tagliare la sfera con un piano perpendicolare a $\alpha\beta$ per modo che il segmento sferico di vertice α stia a quello di vertice β nello stesso rapporto di $\gamma\delta$ a $\delta\epsilon$. Si prolunghi $\alpha\beta$ sino in ζ e si supponga $\alpha\zeta$ eguale alla metà di $\alpha\beta$; sia poi $\alpha\varphi$ perpendicolare a $\alpha\beta$ e $\zeta\alpha$ abbia con $\alpha\varphi$ lo stesso rapporto a $\gamma\delta$ a $\delta\epsilon$; finalmente si prenda $\alpha\theta$ media proporzionale tra $\alpha\varphi$ e $\alpha\zeta$. Si descriva ora una parabola di asse $\zeta\beta$ e vertice ζ, la quale contenga il punto θ; ed inoltre si costruisca un'iperbole passante per φ ed avente per asintoti la retta $\zeta\beta$ e la perpendicolare innalzata in β a questa retta. Se queste due curve s'incontrano in λ e $\lambda\mu$ è perpendicolare a $\alpha\beta$, il piano condotto per $\lambda\mu$ perpendicolarmente a $\alpha\beta$ risolverà il problema.

Per verificare brevemente l'esattezza di questa conclusione si assumano per assi coordinati il diametro $\alpha\beta$ della data sfera e quello

(1) Cantor, *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed., 1894), p. 383.

(2) In una nota a p. 137 del T. I delle *Oeuvres complètes de C. Huygens* (La Haye, 1888) è detto invece che Dionisidoro visse in principio dell'E. v.

(3) Il lettore disegni la figura.

ad esso perpendicolare posto nel piano del disegno; detto R il raggio della sfera e $\frac{l}{m} > 1$ il dato rapporto, le equazioni delle due coniche ausiliari potranno evidentemente rappresentarsi con le equazioni

$$y^2 = \frac{mR(x+2R)}{l+m} \quad , \quad y(x-R) = -\frac{2mR^2}{l+m} ,$$

fra cui, eliminando y, si ottiene

$$x^3 - 3R^2x + 2\frac{l-m}{l+m}R^3 = o \ ,$$

che è appunto l'equazione riferita nel n. 39 del L. II. La soluzione di Dionisidoro, adoperando una parabola invece di un'ellisse, è migliore di quella di Diocle (cf. L. II, n. 73); ben più semplice però è quella che si otterrebbe oggi applicando il metodo di risoluzione geometrica di un'equazione cubica, indicato da Descartes, chè così basterebbe servirsi di un cerchio e di una parabola.

34. Il commentare l'opuscolo sopra la *Misura del circolo* avrebbe potuto porgere ad Eutocio un'ottima occasione per insegnarci qualche cosa intorno all'Aritmetica pratica dei Greci; ma (lo abbiamo già detto altrove, L. II, n. 43) egli non ci fornisce quei desideratissimi ragguagli intorno ai metodi usati a' suoi tempi per estrarre le radici quadrate. Invece, dimostrato che la radice quadrata di un intero non quadrato non può essere un numero intero, egli rimanda alle opere speciali di Erone, Pappo e Teone Alessandrino, e si limita a constatare, con delle volgari elevazioni a quadrato, l'esattezza delle affermazioni archimedee. Dei calcoli da lui effettuati riparleremo nel Libro seguente: ora (poichè il commento ai due libri sull'*Equilibrio dei piani* non porge argomento a lungo discorso, solo potendo essere utile per chi volesse impratichirsi nel maneggio dell'algebra geometrica) dobbiamo invece spendere qualche parola intorno alle osservazioni di cui Eutocio corredò i primi quattro libri delle *Coniche* di Apollonio.

Il geometra di Perga è assai più facilmente intelligibile del Siracusano, specialmente quando ci si limita ai primi quattro libri del suo *opus magnum;* ed Eutocio sgraziatamente ha limitate le

proprie considerazioni alla parte più elementare del lavoro di Apollonio, forse perchè essa da sola forma un trattato completo delle proprietà fondamentali delle curve di second'ordine (cf. L. II, n. 60, nota), forse perchè essa soltanto si trovava a sua disposizione, forse finalmente perchè, limitando così le sue fatiche, egli poteva sfruttare gli analoghi studî di Ipazia (L. III, n. 50) e forse di Sereno (v. più avanti n. 35). Tale maligna congettura si presenta notando che l'impressione prodotta da Eutocio in chi lo legge è di un uomo assai diligente e coscienzioso, ma di mediocrissimo ingegno. Infatti l'enumerare per ogni singola proposizione i varî casi che può presentare la figura relativa, l'avvertire le varianti dei manoscritti, il sopperire alla stringatezza del testo ed anche il proporre qualche modificazione ai ragionamenti dell'autore (1), sono tutte cose che esigono molta diligenza e pregevole erudizione, ma nessuna originalità e non soverchio acume. Il commentatore avrebbe potuto mettere in luce la propria individuatità facendo, ad imitazione di Pappo, ulteriormente fiorire la pianta coltivata da Apollonio od almeno completando la serie dei corollari da lui esposti; ma una cosa e l'altra si cercano indarno in Eutocio: uniche oasi in tale deserto (e nemmeno molto verdi!) sono alcune considerazioni sulle proporzioni composte (2), e un teorema che insegna a riconoscere la natura della conica a cui appartiene un dato arco. Nè più abbondanti sono le osservazioni sull'insieme dell'opera Apolloniana e sulla connessione delle sue parti, o quelle intorno alla dipendenza fra l'opera stessa ed i lavori congeneri anteriori (3). Solo — per non lasciar nulla inosservato — avvertiremo finendo un cenno fatto dall'Ascalonita intorno alla descrizione meccanica di una conica (4) e la sua osservazione che la Prop. 17.ª del I Libro di Apollonio è la generalizzazione della 16.ª del III di Euclide (5). Ed abbandoniamo un commentatore che non lasciò alcuna orma sul glorioso cammino che mena alla verità nella matematica; su di esso sarebbe stato gettato

(1) Anzi non è nemmeno certo che Eutocione sia l'inventore.

(2) *Archimede ed. Heiberg*, T. III, p. 140 e *Apollonio ed. Heiberg*, T. II, p. 218.

(3) Il principal brano di Eutocio relativo a questo argomento venne da noi riferito nel n. 77 del L. I.

(4) *Apollonio ed. Heiberg*, T. II (Lipsiae, 1893), p. 230-232.

(5) Id. p. 228.

il velo dell' oblio, ove egli non fosse apparso agli storici come una delle tre principali sorgenti d'informazioni su quanto i geometri greci pensarono ed operarono.

VI.

SERENO.

35. Fra i matematici appartenenti al periodo argenteo della geometria greca merita qualche considerazione l'autore di due opuscoli che ci pervennero nella loro integrità: cioè Sereno. La determinazione dell'epoca in cui egli visse è estremamente difficile; giacchè nessuno dei commentatori che noi conosciamo lo ricorda (1) e d'altronde leggendo le sue opere non si può concludere altro se non che egli è posteriore ad Apollonio, essendo frequenti le citazioni che egli fa delle *Coniche* (anzi taluno asserì che Sereno le ha anche commentate (2)). Un criterio per determinare il tempo in cui visse Sereno si trasse (3) dall'osservare che molti manoscritti ne indicano Antissa per sua patria; ora poichè questa città dell'isola di Lesbo venne atterrata dai Romani il 167 a. C., si ottenne un limite superiore per la nascita di Sereno e si concluse essere egli nato al più tardi verso il 150 a. C. (4). Ma a questo si obbiettò che all'antica Antissa una seconda succedette al tempo di Strabone (66 a. C. —

---

(1) Il Cantor (*Vorlesungen*, II ed. T. I, p. 384) dice che Sereno è citato da Marino nella prefazione ai *Dati*; ma il nome di Sereno non s'incontra nel testo pubblicato dal Menge nel T. VI di *Euclidis Opera omnia*; ed alla frae ὕστερον 'Αρχιμήδους ὁ Σέρηνος ἐθεώρει (lezione proposta da D. Gregory nella sua edizione di Euclide invece di altra che condurrebbe a ritenere Sereno anteriore ad Archimede) è sostituito nell'or citata edizione (p. 248, lin. 3) ὕστερον 'Αρχιμήδες ἔδειξε.

(2) Cantor l. c., p. 383. Il fondamento per tale opinione, emessa per la prima volta dal Nizze, (v. la versione, più sotto indicata che questi ha curato dell'opuscolo *Sulla sezione del cilindro*) si trova nella dim. della Prop. 16, la quale si chiude con le parole: « questo io ho anche dimostrato geometricamente nei miei commenti »; ora tali parole si cercano indarno nella edizione critica dell'Heiberg dianzi citata (v. p. 50).

(3) Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides* (Leipzig, 1870), p. 184.

(4) Così pensa il Bretschneider, d'accordo (ma con maggior precisione) col Montucla (*Histoire*, T. I, p. 315), che fa vivere Sereno in uno dei quattro secoli che precedettero l'E. v.

24 E. v.) (1). Inoltre uno studio di altri codici degni della massima fede condusse l'Heiberg (2) a concludere che la patria di Sereno non è già Antissa, ma la città d'Egitto Antinoeia od Antinoupoli; ora questa venne fondata da Adriano l'anno 122 dell'E. v. in onore di Antinos, onde Sereno si dovrebbe porre più vicino, per luogo di nascita e per tempo, a Pappo ed a Teone, entrambi nati e vissuti in Alessandria (3). Adottando siffatte conclusioni noi giudicammo opportuno di occuparci di Sereno nel presente libro, ed alla fine di esso, perchè il non essere mai citate le sue ricerche dai commentatori Pappo, Proclo ed Eutocio induce a considerarlo come ad essi non anteriore; ma anche se non lo fosse, esso ci appare come un isola completamente staccata dal gran continente rappresentato dalla geometria greca.

Non ci arresteremo su un brevissimo frammento intitolato Σερήνου τοῦ φιλοσόφου ἐκ τῶν Λημμάτων attribuito al nostro geometra e pubblicato da Th. H. Martin nella sua edizione (cf. L. III, n. 11) dell'*Astronomia* di Teone Smirneo, perchè esso è pressochè insignificante (4): analizzeremo invece con cura i due opuscoli geometrici *Sopra la sezione del cilindro* e *Sulla sezione del cono,* i quali vennero giudicati così favorevolmente da ottenere, in tempi diversi, eccellenti edizioni (5) e traduzioni in latino (6) e tedesco (7).

36. Lo scopo del primo degli opuscoli di Sereno (περὶκ κυλίνδρου τομῆς) è dichiarato esplicitamente nella lettera-prefazione con cui esso si apre e che suona così:

(1) Osservazione del Blass riferita dal Cantor (l. c.).

(2) *Ueber den Geburtsort des Serenos* (Bibl. mathematica, p. 97-98).

(3) Tale conclusione è in accordo colle opinioni del Baldi, che dà il 462 come data della nascita di Sereno (*Cronica dei matematici,* Urbino, 1707, p. 59), dello Chasles, che fa Sereno contemporaneo a Pappo (*Ap. hist.*, p. 47), e di P. Tannery, che lo pone fra Pappo ed Ipazia (v. l'articolo *Serenus d'Antissa,* in Bull. des Sc. math., 2.ª Serie, T. VII, 1883).

(4) Una correzione al testo di questo frammento fu indicata da F. Hultsch nella nota *Zur Terminologie der griechischen Mathematikern* (Zeitschr. für Math und Phys., T. XXIV, 1879, Hist.-lit. Abth., p. 41-42).

(5) L' « editio princeps » è quella dell'Halley (Oxonii, 1710); noi ci serviremo di quella più recente curata dall'Heiberg (*Sereni Antinoensis Opuscula,* Lipsiae, 1896).

(6) *Sereni Antissensis philosophi libri duo, a Federico Commandino Urbinate e graeco conversi* (Bononiae 1566 e Pistorii 1696).

(7) *Serenus von Antissa über den Schnitt des Cylinders* (Stralsund, 1860), *Serenus von Antissa über den Schnitt des Kegels* (Id. 1861).

Siccome mi accorsi, caro Ciro, che parecchi di coloro i quali si occupano di geometria, son d'avviso che la sezione obliqua del cilindro sia essenzialmente differente dalla sezione del cono chiamata ellisse (1), così pensai essere necessario di adoperarsi a che essi non persistessero in tale errore e convincere essi e coloro che pensano nel medesimo modo. È veramente un controsenso quello commesso da certi geometri quando affermano delle proposizioni geometriche senza dimostrarle o solo giustificandole con dimostrazioni apparenti, il che è assolutamente contrario alla geometria. Perciò, dal momento che essi hanno quell'opinione, mentre noi non la condividiamo, vogliamo assodare geometricamente come in entrambi i corpi, nel cono cioè e nel cilindro, nasce una sezione della medesima forma, purchè essi vengano segati con una certa regola e non in modo completamente arbitrario. Ma, come gli antichi i quali trattarono le proprietà del cono, non si limitarono al concetto ordinario di cono (secondo il qual concetto esso viene generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo) ma svolsero altre considerazioni più generali costruendo, non solo coni retti, ma anche coni obliqui; così noi pure, studiando la sezione del cilindro, dobbiamo, non soltanto tagliare e considerare il cilindro retto, ma dare maggiore estensione alle nostre investigazioni trattando anche il cilindro obliquo. Ora io so benissimo che tutti ammettono senza difficoltà non essere retto qualunque cilindro, perchè a tale conclusione guida la definizione consueta; ciò non ostante, per maggiore chiarezza credetti opportuno di proporre una definizione più generale; risulta così che la sezione del cilindro retto coincide con l'ellisse del cono retto, mentre nell'ipotesi più generale essa è eguale ad un'ellisse: dimostrar ciò è appunto lo scopo della presente memoria.

La definizione generale a cui allude Sereno è la seguente: " si suppongano dati due cerchi eguali in piani paralleli; se due loro diametri si muovono con la condizione di conservarsi fra loro paralleli, le congiungenti fra loro parallele dei loro estremi formeranno una *superficie cilindrica* ". Da essa segue una definizione generale di *cilindro* e la necessità di distinguere fra i cilindri quelli che sono *retti* da quelli che sono *obliqui:* a queste tengono dietro altre definizioni (35 secondo Halley, soltanto 33 secondo Heiberg), tolte od almeno ispirate da altre che leggonsi nelle *Coniche* di Apollonio.

La prima delle proposizioni esposte da Sereno è un semplicissimo lemma di geometria piana, mediante il quale egli fa vedere essere un parallelogramma ogni sezione prodotta in un cilindro da

(1) La causa di tale errore sta probabilmente nel non avere Apollonio accennato mai alle sezioni del cilindro; egli lo fece forse (Zeuthen, *Die Lehre der Kegelschuitte* etc., p. 416) perchè giudicò assai agevole il sopperire al suo silenzio; da esso però ha probabilmente origine il fatto che in tutta la letteratura matematica greca si cerca indarno qualche esempio di deduzione delle proprietà dell'ellisse da quelle del cerchio mediante projezione parallela.

un piano passante per l'asse (prop. 2) o ad esso parallelo (prop. 3). Un altro lemma è la proposizione che afferma essere una circonferenza ogni linea tale che la perpendicolare calata da un suo punto sopra una corda fissa sia media proporzionale tra i segmenti di questa corda (prop. 4); Sereno se ne serve per ottenere (prop. 5 e 6) le due serie di sezioni circolari in ogni cilindro, quindi insegna a costrurre la generatrice di un cilindro che passa per un suo punto arbitrario (prop. 7) e fa vedere che analogamente a quanto avviene nel cono (1) — il segmento che congiunge due punti qualunque del cilindro è ad esso interno (prop. 8). Nelle due prop. seguenti entra in scena la sezione prodotta in un cilindro da un piano qualunque; Sereno dimostra che essa non è circolare nè rettilinea; finalmente nelle Prop. 11 e 12 si apprende l' esistenza e la costruzione delle corde di un cilindro che son bisecate da un piano (diametrale). Dimostrata poi come lemma una proprietà di due punteggiate simili, Sereno coi teoremi 14-15 stabilisce un certo numero di proprietà di cui gode la sezione del cilindro, che ne manifestano la identità con l' ellisse, e seguita osservando:

L' identità delle sezioni si può anche verificare su moltissime altre proprietà comuni; ma le più importanti son quelle che vennero già esposte. Dopo di avere spinte le considerazioni sino a questo punto, non è mio intendimento di dimostrare anche tutto il resto e trattenermi sopra cose estranee al mio scopo. Chi vorrà istituire delle indagini precise sull'ellisse dovrà invocare la teoria di Apollonio Pergeo; ma, facendo ulteriori investigazioni e paragonando quanto esponemmo col I Libro delle *Coniche* di Apollonio, constaterà la verità dell' asserto; giacchè mostrerà che tutte le proprietà ivi dimostrate per la sezione conica chiamata ellisse sussistono per la sezione del cilindro. Senz' arrestarci sopra questo, io mi limiterò a far conoscere poche altre proposizioni da cui pure emerge l' identità delle sezioni e poi mi volgerò ad altro.

Le proposizioni (20-22) complementari a cui allude Sereno, meritarono le lodi di Chasles (2); esse insegnano la costruzione di un cono e di un cilindro passanti per la medesima ellisse. Notevoli anche sono le analoghe prop. 23, 24 e 26 (mentre la intermedia 25 non è che un lemma di algebra geometrica); nè possono venir passate sotto silenzio quelle che portano i numeri 27 e 28, da cui si apprende la distribuzione in due serie semplicemente infinite delle sezioni di un cono o di un cilindro che sono simili ad un' ellisse data.

(1) V. Apollonio, Lib. I, prop. 2.
(2) *Aperçu historique*, p. 47.

Narra in seguito Sereno avere un geometra suo amico, di nome Pitone, illustrata la teoria euclidea delle parallele, citando come esempio di rette fra loro parallele il contorno dell' ombra che projetta una colonna illuminata da una fiaccola. Tale osservazione spinse Sereno a cercare il luogo dei punti di contatto delle tangenti di un cono o di un cilindro che passano per un punto, ed a scoprire che quel luogo appartiene ad un piano determinato (Prop. 29, 32 e 33). Questa conclusione — che, in un certo senso può avvicinarsi ad alcuni teoremi di Aristarco (L. III, n. 54) — fece risalire a Sereno i concetti di polare di un punto rispetto ad un angolo, un cono od un cilindro; mentre il teorema " la projezione centrale di un triangolo fatta su un piano parallelo è un triangolo simile al triangolo obbiettivo " servì a C. Taylor (1) per rispondere affermativamente alla questione proposta da Chasles (2) " agli antichi era nota, come mezzo di ricerca scientifica, la prospettiva? "; ma anche chi si associa a questo modo di giudicare non può disconoscere che le loro cognizioni in proposito dovevano essere assai limitate.

37. Il secondo degli opuscoli di Sereno ha per titolo περὶ κώνου τομῆς; esso consta, nell'edizione di Heiberg, di sessantanove proposizioni (di sessantatre nella traduzione del Nizze), precedute dalla lettera che qui riportiamo:

Mio ottimo Ciro. Le sezioni prodotte nei coni da piani pei loro vertici sono triangoli e dànno origine a svariate e belle indagini; tuttavia, per quanto mi consta, non vennero ancora studiate. Mi parve quindi opportuno di non lasciare intatto questo tema e di esporre tutto ciò che mi è noto sopra di esso. Io credo di avere esposto la maggior parte e quanto sembra esigere uno studio geometrico più profondo. Ma nessuno deve stupirsi di non trovare qui cose che potevano benissimo essere dette, essendo io il primo a trattare tale teoria. E sarà naturale che o tu, addentrandoti nella stessa ricerca, completi ciò che io espongo, oppure che altri sia indotto a farlo. Però alcune cose vennero da me taciute ad arte o perchè erano evidenti o perchè erano state dimostrate da altri. Così, per non mescolare i miei ritrovati a cose esposte da altri, ho lasciato in disparte la proposizione « ogni sezione fatta in un cono da un piano passante pel vertice è un triangolo » perchè altri la dimostrarono prima (3). Inoltre non giudicai degne di trovare posto qui le cose meno profonde e da tutti concepibili, per non distrarre l'attenzione di chi studia.

---

(1) *An Introduction to ancient and modern Geometry of conics* (Cambridge, 1881), p. LV.

(2) *Ap. hist.*, p. 74 nota.

(3) Apollonio, L. I, prop. 3.

Queste parole mostrano qual sia lo scopo del secondo opuscolo di Sereno; è lo studio comparativo delle sezioni prodotte in un cono da piani passanti pel vertice. Per raggiungere il suo intento egli ha bisogno di un buon numero di lemmi, alcuni dei quali hanno una certa importanza, perchè completano la teoria euclidea delle proporzioni ed il quadro dell'algebra geometrica dei Greci (cfr. n. 18); eccone gli enunciati:

1. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ sarà $ad > bc$ (1).

18. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ sarà $\frac{a^2}{b^2} > \frac{c^2}{d^2}$.

19. Supposto

$$a + b = a' + b' \ , \ \frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} \ , \ a > b \ , \ a' > b' ,$$

sarà a la massima e b la minima delle quantità a, b, a', b'.

54 e 55. Supposto

$$a > c \geqq d > b ,$$

se

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

sarà

$$ab > cd$$

e viceversa.

56. Se

$$a + b = c + d \ , \ ab = cd ,$$

le quantità a, b sono eguali alle quantità c, d a meno dell'ordine (2).

Altre due proposizioni lemmatiche di Apollonio esprimono, nel linguaggio proprio agli antichi geometri, che il coseno è funzione decrescente dell'angolo e che il seno di un angolo acuto è minore dell'unità; vanno notate come ingredienti forniti dai geometri greci all'odierna teoria delle funzioni circolari (cf. n. 14). Ritroviamo

(1) Cfr. Euclide *Elementi*, Lib. VI, prop. 16. Lo stesso teorema di Sereno si trova in Pappo (*ed. Hultsch*, p. 696).

(2) Questa proposizione si trova già in Pappo, sotto forma un po' meno precisa (Lib. VII, Prop. 224); v. il n. 19 del presente Libro. È noto che un teorema analogo ha luogo per due gruppi di n quantità; è quello che dice essere desse eguali, a meno dell'ordine, se coincidono le loro funzioni simmetriche semplici.

poi in Sereno dimostrata (Prop. 17) la relazione metrica fra i lati di un triangolo ed una mediana, che già notammo (n. 19) in Pappo: e ciò va rilevato perchè la mediana è un elemento di cui Euclide non parla affatto e di cui Archimede non avvertì (cf. L. II, n. 34) che l'intervento in questioni meccaniche. Sereno applica quella proposizione (Prop. 21 e 26) al paragone delle aree di due triangoli aventi comuni le basi e le corrispondenti mediane ed alla costruzione di un triangolo di cui, all'infuori di altri elementi, si conosce una mediana. Passando sopra ad altri teoremi di minore importanza, relativi a triangoli (Prop. 8, 19 e 37) e al cerchio (prop. 53), citeremo il seguente che appartiene alla teoria dei massimi e minimi:

53. Se si congiunge un punto qualunque di un arco circolare agli estremi dello stesso si ottengono due corde la cui somma è massima se quel punto è il centro dell'arco.

Chiuderemo quest'enumerazione delle proposizioni lemmatiche esposte da Sereno citando la seguente:

Il luogo delle projezioni ortogonali del vertice di un cono circolare obliquo su i diametri della base è la circonferenza avente per diametro la retta che unisce il centro della base alla projezione sulla stessa del vertice del cono;

essa, che certamente era nota prima di Sereno, completa la deficiente stereometria euclidea coll'aggiunta del notissimo " teorema delle tre perpendicolari ".

38. Prescindendo da questi teoremi ausiliari, l'opuscolo di Sereno può considerarsi composto di tre parti concernenti la prima i coni retti (Prop. 1-13), la seconda gli obliqui (Prop. 15-57), l'ultima — probabilmente ispirata ai teoremi 14 e 15 del XII Libro di Euclide — il paragone fra due coni; a cui segue un'appendice che presenta poco legame col resto (1).

Nella prima parte Sereno ha notato un'essenziale diversità di comportamento fra i coni acutangoli e gli ottusangoli, o, come egli preferisce dire, fra i coni in cui l'asse h è maggiore del raggio r della base e quelli in cui è minore. Per vedere in che cosa consista tale differenza chiamiamo T l'area di una sezione triangolare del cono, la base della quale abbia la lunghezza $2c$.

---

(1) Le prime due parti potrebbero somministrare un buon materiale per esercizi scolastici sulla teoria dei massimi e dei minimi.

Sarà

$$T = c\sqrt{r^2 - c^2 + h^2}.$$

Per determinare il massimo di T si osservi che, essendo costante la somma delle quantità $c^2, r^2 - c^2 + h^2$, il loro prodotto, cioè T^2, riuscirà massimo quando quelle due quantità saranno fra loro eguali, cioè quando si avrà

$$c^2 = r^2 - c^2 + h^2,$$

ovvero

$$c = \sqrt{\frac{r^2 + h^2}{2}};$$

ma affinchè a questo valore corrisponda un triangolo reale dev'essere

$$c < r,$$

cioè

$$\sqrt{\frac{r^2 + h^2}{2}} < r,$$

ossia

$$h^2 < r^2,$$

cioè il cono dev'essere ottusangolo; nel caso limiti $c = r$ il triangolo sezione massima è non solo isoscele ma anche rettangolo (Prop. 13).

Ma, se il cono è acutangolo, dall'essere

$$c < r < h$$

segue

$$r^2 - c^2 > 0 \ , \ c^2 - h^2 < 0 \ , \ (r^2 - c^2)(c^2 - h^2) < 0,$$

e quindi

$$c^2(r^2 - c^2 + h^2) < r^2h^2$$

cioè

$$T < rh.$$

Ora rh misura l'area dei triangoli i cui piani passano per l'asse, dunque questi, *soltanto per coni acutangoli,* rappresentano le sezioni di area massima.

Avvertito questo differente modo di comportarsi, nascono delle questioni, quali sono le seguenti, che Sereno insegna a risolvere:

9. Segare un cono retto acutangolo con un piano pel vertice in modo da ottenere una sezione la cui area abbia un rapporto dato (>1) con l'area di una sezione assiale.

10-11. Segare un cono ottusangolo in modo che la sezione triangolare ottenuta sia eguale ad una sezione assiale oppure sia massima.

Passiamo alla seconda parte dell'opuscolo di Sereno. Chiamiamo S il vertice di un cono obliquo avente per base un circolo di centro C e raggio r; sia H la projezione di S sul piano della base, e si ponga $CH = d$, $SH = h$; sia finalmente SAB una sezione triangolare del cono e α, β gli angoli che la retta CH forma coi raggi CA e CB. Un facile calcolo mostra che l'area T del triangolo SAB è data della formola

$$(1) \qquad T = r \operatorname{sen} \frac{|\alpha - \beta|}{2} \sqrt{h^2 + \left(d \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + r \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2}$$

ove $|\alpha - \beta|$ rappresenta al solito il valore assoluto della differenza tra gli angoli α e β.

Fra le sezioni triangolari del dato cono si distinguono:

1.° le *sezioni assiali,* i cui piani cioè passano per la retta SC,

2.° le *sezioni isosceli,*

3.° le *sezioni parallele,* le cui basi sono parallele alla retta CH;

ne indicheremo le aree risp. con T_a, T_i, T_p. Si ottiene una sezione assiale supponendo che la retta AB sia un diametro della base del cono, una sezione isoscele supponendola perpendicolare alla retta CH, ed una sezione parallela supponendola parallela a questa retta. In corrispondenza fra gli angoli α, β sussiste una delle seguenti relazioni:

$$|\alpha - \beta| = \pi \quad , \quad \alpha + \beta = \pi \quad , \quad \alpha + \beta = 2\pi$$

e dalla formola (1) si ottengono le tre altre seguenti:

$$(2) \qquad T_a = r \sqrt{h^2 + d^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \,,$$

$$(3) \qquad T_i = r \operatorname{sen} \alpha \sqrt{h^2 + (d + r \cos \alpha)^2} \,,$$

$$(4) \qquad T_p = r \cos \alpha \sqrt{h^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \,,$$

nell'ultima delle quali va notata l'assenza di d.

Emerge dalla (2) che i valori estremi di T_a corrispondono ai valori estremi di sen α; onde il massimo di T_a è

$$T_1 = r \sqrt{h^2 + d^2}$$

ed il minimo

$$T_2 = rh;$$

il primo di questi valori compete al triangolo che è ad un tempo isoscele ed assiale, mentre il secondo si riferisce alla sezione assiale perpendicolare alla base. A ragione pertanto Sereno afferma (Prop. 24) che " l'area di una qualunque sezione assiale di un cono obliquo oscilla fra l'area della sezione perpendicolare alla base (minimo) e l'area della sezione isoscele (massimo) „. Ciò prova che, per quanto concerne le sezioni assiali, tutti i coni obliqui si comportano nello stesso modo.

Ma altrettanto non si può ripetere per le sezioni isosceli o parallele. Osserviamo infatti che per essere

$$(r \cos \alpha)^2 + (h^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha) = h^2 + r^2 = \text{cost}.$$

T_p^2 sarà massimo quando

$$r^2 \cos^2 \alpha = h^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

cioè

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{r^2 - h^2}{2r^2}}.$$

Ma affinchè questo massimo sia reale dev'essere $h < r$, e allora come massimo di T_p^2 si ha $\frac{r^2 + h^2}{2}$. Se invece è

$$r > h$$

sarà *a fortiori*

$$h^2 > r^2 \cos^2 \alpha$$

e quindi

$$rh > r \cos \alpha \sqrt{h^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

cioè

$$T_p < rh.$$

Ciò prova che, quando il raggio della base del cono è minore della distanza fra il vertice e la base, ed allora soltanto, la sezione parallela massima è quella che contiene l'asse (Prop. 29 e 30). Similmente, applicando la formola (3), si conclude, con Sereno

(Prop. 31, 32, 34-36, 40-44), che, rispetto alle sezioni isosceli, i coni in cui l'asse non è minore del raggio della base si comportano differentemente dagli altri; soltanto pei primi il triangolo assiale è massimo; notevole è il caso — su cui si arresta il nostro geometra (Prop. 50-51) — in cui l'asse è eguale al raggio della base.

Giova ancora accennare ad un teorema (Prop. 57) da cui emerge che Sereno ha rivolto la propria attenzione anche ai perimetri dei triangoli assiali, ed ai numerosi problemi da lui trattati aventi per fine la costruzione di triangoli assiali, isosceli o paralleli, le cui aree sian massime o minime, oppure abbiano rapporti dati con quelli di area massima o minima.

39. Nell' ultima parte del proprio lavoro Sereno instituisce dei paragoni, non più fra sezioni differenti di un medesimo cono, ma fra certi elementi di coni diversi. Per compendiare i suoi risultati chiamiamo di un cono retto r il raggio della base e h l'altezza, B la base, T l'area del triangolo per l'asse e V il volume: sarà

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad , \quad B = \pi r^2 \quad , \quad T = rh \; . \tag{5}$$

Indicando con r', h', B', T', V' gli elementi analoghi di un secondo cono, le proposizioni stabilite da Sereno possono esprimersi come segue:

58-59. Se $V = V'$ sarà $\frac{T}{T'} = \frac{r'}{r}$ e viceversa.

60-61. Se $T = T'$ sarà $\frac{B}{B'} = \frac{V^2}{V'^2}$ e viceversa.

62-63. Se $r = r'$ sarà $\frac{V}{V'} = \frac{h}{h'}$ e $B = B'$ e viceversa.

64-65. Se $\frac{V}{V'} = \frac{h}{h'}$ sarà $B = B'$ e viceversa.

66-67. Se $\frac{V}{V'} = \frac{B}{B'}$ sarà $\frac{T}{T'} = \frac{r}{r'}$ e viceversa.

68. Se $\frac{V}{V'} = \frac{B^2}{B'^2}$ sarà $\frac{T}{T'} = \left(\frac{r}{r'}\right)^3$ e viceversa.

Le relazioni (5) permettono di dimostrare con tutta facilità questi teoremi. Quanto a Sereno, egli ne stabilisce la verità con i procedimenti geometrici in uso ai suoi tempi; il suo stile è semplice, modellato sugli esempî migliori, ma senza la pedanteria di Autolico ed Euclide; il che concorda coll'opinione che egli appartenga all'epoca in cui la geometria greca volgeva al tramonto. Quanto al valore intrinseco dell'opuscolo di Sereno, il lettore è in grado di giudicarlo da quanto esponemmo; basterebbe, secondo noi, l'avere Sereno scoperto il modo diverso di comportarsi dei varî coni rispetto alle aree delle loro sezioni triangolari, per mostrare che egli non era privo della forza per far compiere qualche avanzamento alla scienza geometrica.

40. Sereno è l'ultima personalità ben delineata che ci si presenta; al pari della maggior parte degli altri matematici (1) di cui ci siamo finora occupati è incerta l'epoca in cui egli fiorì, sono ignoti i casi della sua vita e probabilmente è incompleto il catalogo delle sue opere.

Siffatte lacune che in gran numero presenta la storia della geometria greca rendono mal sicure e barcollanti tutte le deduzioni che potrebbesi essere tentati di trarre intorno al modo in cui questa scienza si svolse. Esse però non impediscono di concludere che i Greci lasciarono ai posteri uno splendido patrimonio geometrico, il quale, giunto che fu nelle mani di chi seppe amministrarlo a dovere, fu fecondo di quell'immensa ricchezza che forma la forza e la gloria dei moderni. Che altrettanto non possa ripetersi per la maggior parte delle branche della Matematica applicata, emerge da quanto esponemmo nel Libro precedente. Al Libro seguente è riserbato di risolvere la questione analoga per l'Aritmetica, di decidere cioè in qual modo ed in quale misura le indagini compiute dai Greci sulla Scienza dei numeri si colleghino a quelle che vennero affrontate e condotte a termine, in Europa specialmente, dopo il Rinascimento.

(1) Riandando su quanto esponemmo sinora si vedrà che le uniche date sicure che incontrammo sono quelle della morte di Archimede e quelle degli estremi della vita di Proclo, Platone ed Aristotele.

Fig. 1ª

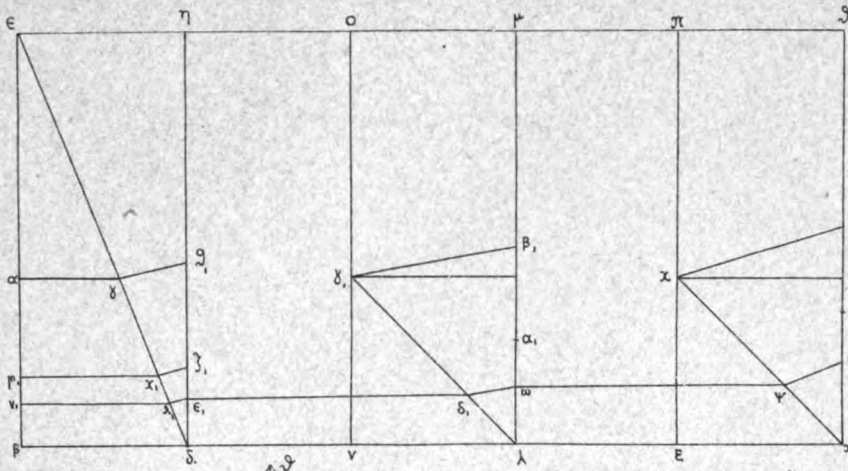



Fig. 3ª

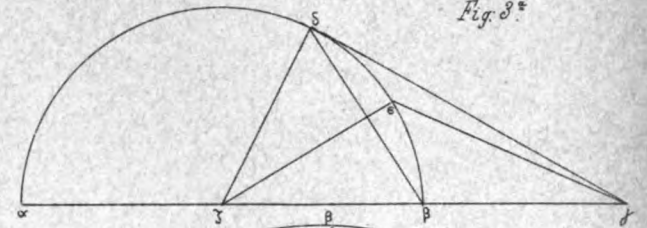



Fig. 4ª

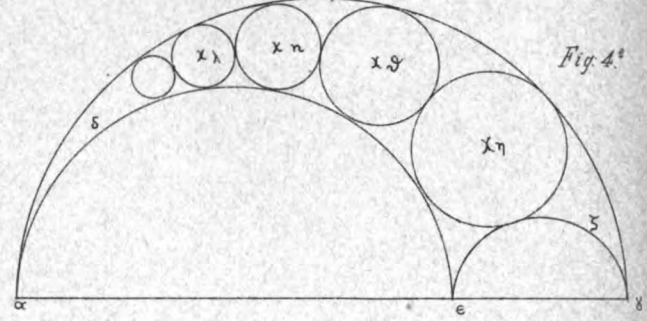



Fig. 2ª

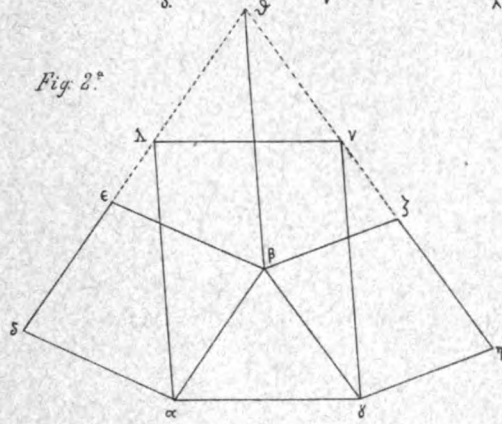



Fig. 5ª

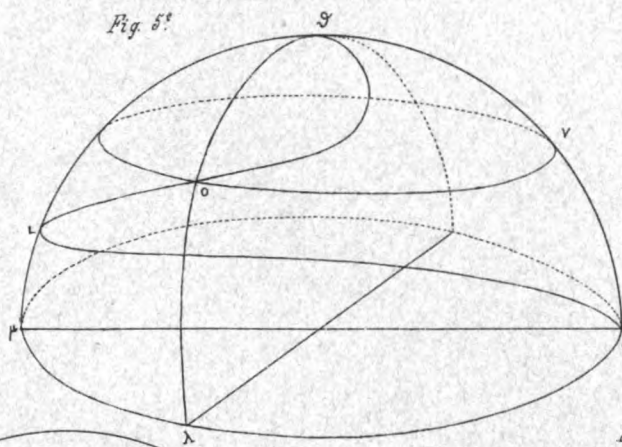



Fig. 6ª

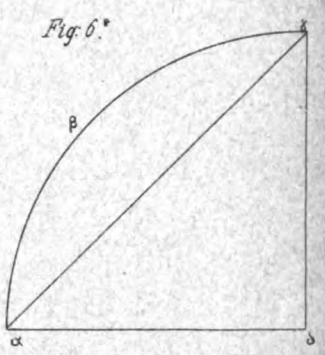



Fig. 7ª

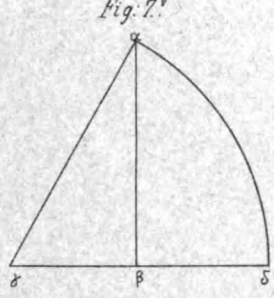



Fig. 8ª

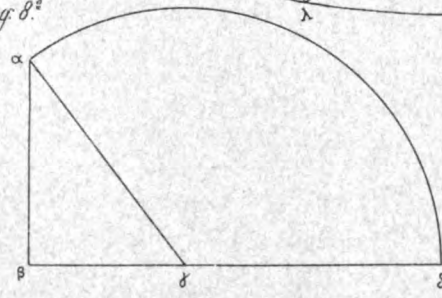



Fig. 9ª

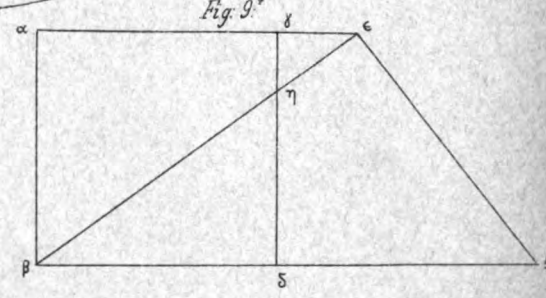



Fig. 10ª

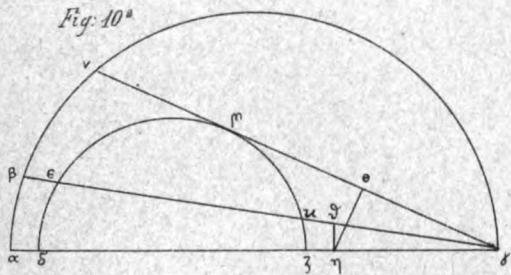



Fig. 11ª

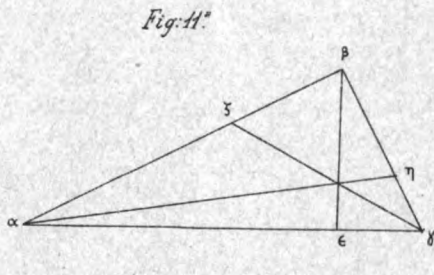



Fig. 12ª

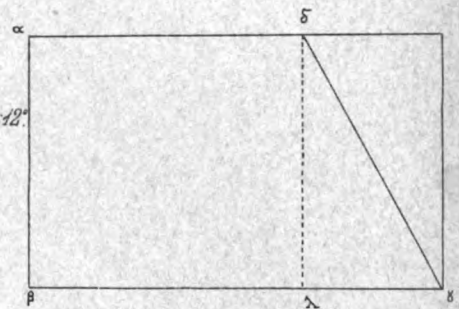



Fig. 13ª

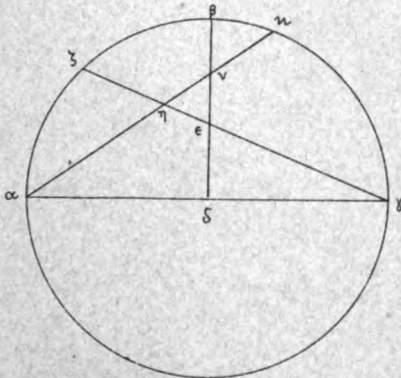



Fig. 14ª

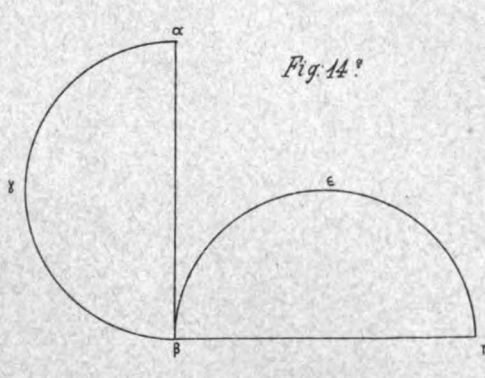
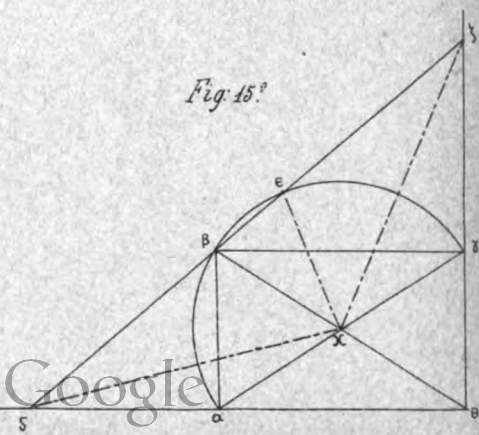



Fig. 15ª

INDICE

Preliminari.

I. Gemino.

1. Citazioni di Gemino fatte da Proclo e concernenti la teoria delle curve. 2. Citazioni relative alla filosofia della matematica. 3. Citazioni relative alla teoria delle parallele; ipotesi intorno al titolo di un' opera di Gemino. 4. Un' opera astronomica che va sotto il nome di Gemino; questioni collegate a questo scienziato.

II. Teone da Smirne.

5. Considerazioni sopra le proporzioni e le figure svolte da Teone Smirneo.

III. Pappo d'Alessandria.

6. Importanza storica della *Collezione matematica* e notizie sopra Pappo. 7. Generalità intorno alla *Collezione:* cenno intorno ai primi due libri di essa. 8. Analisi del III Libro. La prima parte di esso (soluzione approssimata del problema di Delo, e soluzioni esatte della stessa questione). 9. Continuazione. Le altre tre parti del III Libro (le dieci proporzioni, estratti dei *Paradossi* di Ericinio, poliedri). 10. Il Libro IV della *Collezione*, parte prima (generalizzazione del teorema di Pitagora, applicazioni del X Libro di Euclide, serie di circoli fra loro tangenti). 11. La seconda e la terza parte del IV Libro (spirale d'Archimede e concoide di Nicomede). 12. La quarta parte dello stesso libro (quadratrice di Dinostrato e spirale di Pappo). 13. Il resto del IV libro (problema della divisione di un angolo in parti aventi assegnati rapporti, problemi riducibili ai precedenti). 14. Il V Libro della *Collezione* (teoria degli isoperimetri nel piano e nello spazio). 15. Il VI Libro della *Collezione* (astronomia). 16. Il VII libro della *Collezione*. Generalità; il teorema di Guldin. 17. Continuazione. Lemmi per la *Sezione determinata* di Apollonio. 18. Continuazione. I lemmi alle *Coniche* e l'Algebra geometrica in Pappo. 19. Continuazione. I lemmi alle *Inserzioni*, ai *Contatti*, ai *Luoghi piani* ed ai *Porismi*. 20. I lemmi ai *Luoghi superficiali* di Euclide. 21-22. L'VIII libro della *Collezione* (meccanica). 23. Conclusione. Altre opere di Pappo; notizie date da Proclo. 24. Informazioni di fonte araba Il Commento di Pappo al X libro di Euclide.

IV. Il Neo-Platonismo. — Proclo, Marino, Simplicio.

25. Origini del Neo-Platonismo. Vita di Proclo. 26. Sue opere. 27-28. Il *Commento* di Proclo al I Libro di Euclide. Analisi di esso. 29. Esistevano commenti di Proclo agli altri libri di Euclide? 30. Marino da Neapoli. Isidoro, Simplicio.

V. **Eutocio.**

31. Vita ed opere di Eutocio. 32-33. Suoi commenti ai due libri di Archimede *Su la sfera ed il cilindro*. 34. Cenni intorno ai commenti alla *Misura del circolo* ed all'*Equilibrio dei piani*. Commenti ad Apollonio. Conclusione.

VI. **Sereno.**

35. Notizie intorno a Sereno ed alle sue opere. 36. Analisi dello scritto *Su la sezione del cilindro*. 37-39. Analisi dell'opuscolo *Su la sezione del cono*.
40. Epilogo.

AGGIUNTE E CORREZIONI AL LIBRO III.

A complemento della bibliografia sulle questioni trattate nel I Cap. vanno segnalate le tre seguenti note di P. Tannery: *Pseudonymes antiques:* I *Leucippe.* II *Hicétas.* III *Ecphante* (Revue des études greques, T. X, 1897); *Sur Héraclide du Pont* (Id. T. XII, 1899); *Ecphante de Syracuse* (Archiv für Geschichte der Philosophie, XI Band, 1898).

Al n. 11 vanno arrecate le seguenti modificazioni, che provengono da amichevoli osservazioni del Sig. P. Tannery.

1.° *Erofilo* non è un individuo ignoto, ma sibbene un medico che godette di qualche celebrità durante il regno di Tolomeo Lago.

2.° *Ibico* è forse quello stesso tragico che visse durante il VI Sec. a. C. ed è ricordato per un aneddoto ordinariamente indicato come quello delle « gru di Ibico ».

3.° Il lavoro di Adrasto non esiste, come era stato creduto, nella Biblioteca di Napoli.

4.° Per equivoco venne indicato *Neapolis* invece di *Afrodisia* come patria di Adrasto.

Libro V.

L'aritmetica dei Greci.

Tutte le idee che campeggiano nella Matematica traggono, in ultima analisi, la loro origine da due osservazioni. Consiste la prima nel constatare che qualsia corpo solido, cadente sotto gli organi dei nostri sensi, possiede, indipendentemente da tutte le altre sue proprietà fisiche (colore, temperatura, stato elettrico e simili), una *forma,* la quale, ove non intervengano cause perturbatrici esterne, è invariabile epperò caratteristica per quell' oggetto. La seconda osservazione si riferisce ad un gruppo di cose, e consiste nel notare che, se si fa astrazione da tutte le proprietà fisiche di queste (la forma inclusa), quel gruppo conserva un *quid* caratteristico che si chiama *numero* di quelle cose. Al concetto di forma di un corpo, logicamente svolto, deve la propria esistenza la scienza dell'estensione figurata, la *Geometria;* il concetto di numero invece è il fondamento di tutta l'*Aritmetica,* inteso questo vocabolo nel significato più ampio possibile.

Le esperienze quotidiane di qualsia persona intelligente guidano così spontaneamente alla concezione delle più semplici figure geometriche e suggeriscono tanto naturalmente l'investigazione delle loro proprietà, che è impossibile dire chi sia stato il primo individuo od il primo popolo che abbia coltivato la Geometria, quale sia stata l'epoca che la vide nascere. Similmente le occasioni al contare sono tanto frequenti e numerose, la relativa operazione è siffattamente

connaturata a tutto il nostro meccanismo intellettuale, che vano riuscirebbe il tentativo di redigere la fede di nascita dell'Aritmetica. Ben se n'avvide Platone, il quale, a chi voleva si attribuisse ad un tal Palamede l'arte del conteggio, argutamente rispose: " E che forse, Agamennone, senza Palamede, avrebbe ignorato quanti piedi aveva? ".

Se pertanto riesce vano ogni sforzo per determinare chi prima dei Greci, chi prima dei Fenici — che i Greci consideravano loro maestri in Aritmetica (1), come in Geometria si ritenevano discepoli degli Egiziani (2) —, è possibile e sommamente interessante il determinare quali mezzi ausiliari siansi creati gli uomini per potere eseguire i calcoli sempre più complicati che il consorzio civile, le transazioni commerciali e poi le investigazioni scientifiche richiedevano.

Tali mezzi sono notoriamente la Numerazione parlata e la Numerazione scritta; essi sono il materiale ogni giorno adoperato nell'arte del calcolo o Logistica (cf. L. IV, n. 2); colla descrizione di quelli fra tali mezzi che adoperò un determinato popolo e della maniera in cui vennero usati, deve aprirsi la storia dell'Aritmetica presso questo popolo; epperò gli è dei procedimenti di calcolo adoperati dagli antichi Greci che noi dobbiamo prima di qualunque altra cosa occuparci.

---

(1) Intendiamo parlare dell'Aritmetica *pratica*, strumento indispensabile ai primi e più abili commercianti del mondo.

(2) Vedremo presto che, malgrado che i Greci non lo riconoscessero, anche nell'Aritmetica pratica furono discepoli degli Egiziani.

I.

La logistica greca.

Numerazione parlata.

1. Per contare e poi calcolare è indispensabile di avere a propria disposizione una collezione di vocaboli, con cui designare i successivi elementi della serie naturale dei numeri. A tale scopo si scelsero in origine delle parole già esistenti; infatti i filologhi insegnano come in origine per indicare i numeri di uso più frequente, quali sarebbero

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 20,$$

si adoperassero le parole

io, ali, trifoglio, mano, uomo,

il cui significato ha una connessione evidente con quei numeri.

Ma è chiaro che, per quanto fervida fosse la fantasia e tenace la memoria degli aborigeni, ben presto si sarà visto essere impossibile di designare con nomi nuovi scelti quasi a capriccio tutti i numeri immaginabili e di ricordare le denominazioni scelte. Per rimuovere tale ostacolo — così grave che, ove non fosse stato vinto, l' Aritmetica, nè come arte nè come scienza, non avrebbe nemmeno esistito — si pensò di fissare, nella serie omogenea (indifferenziata) dei numeri, alcuni individui (che possono chiamarsi *numeri principali*) succedentisi con una certa legge, i quali fungessero quasi da pietre miliari per giudicare del cammino che il nostro pensiero deve percorrere per arrivare ad un elemento qualunque di quella serie; allora, per indicare uno di tali elementi, non si aveva che da far conoscere a parole di quanto esso si scostasse dal numero principale più prossimo. È questo il concetto che funge da midollo, non soltanto del nostro sistema di numerazione, ma anche di tutti gli altri a noi noti; sistemi i quali differiscono per questo che, mentre noi

prendiamo come intervallo fondamentale (cioè come intervallo fra due numeri principali consecutivi) il 10 — probabilmente perchè dieci sono le dita delle mani (1), primi ajutanti del calcolatore — altri popoli preferiscono il 5 od il 20, ed altri (i quali si trovano per abitudini intellettuali da noi molto discosti) il 6 o l'11.

2. Applicando il concetto che testè delineammo, i Greci stabilirono un sistema di numerazione parlata avente per base il numero 10, ma in cui anche il 20 ha un posto distinto. Ed invero i primi dieci numeri essi designavano con i seguenti nomi:

1. εἷς ; 2. δύο ; 3. τρεῖς ; 4. τέσσαρες ; 5. πέντε ; 6. ἕξ ; 7. ἑπτά ; 8. ὀκτώ ; 9. ἐννέα ; 10. δέκα

col mezzo di essi componevano i nove seguenti:

11. ἕνδεκα ; 12. δώδεκα ; .... ; 19. ἐννεακαίδεκα.

Ma pel numero seguente usavano un nome speciale

20. εἴκοσι,

col quale e coi numeri 1, 2, ..., 9 componevano i numeri 21, 22, ..., 29. Similmente formavano tutti i numeri del primo centinajo mediante i nomi seguenti:

30. τριάκοντα ; 40. τεσσαράκοντα ; .... ; 90. ἐνενήκοντα.

Similmente, da

100. ἑκατόν

deducevano il modo di indicare i numeri sino al 999; poi mediante

1000. χίλιοι

(1) Nel libro dei *Problemi*, attribuito ad Aristotele, è posta (XV, 3) la questione « Perchè tutti, tanto i barbari quanto gli Ellèni, contano per decine, e non altrimenti? », ed è dato come risposta appunto il fatto che le mani dell'uomo hanno complessivamente dieci dita.

riuscivano a spingersi sino a 9999; sembra che il numero

10000. μύριοι

rappresentasse il limite al quale si arrestarono in origine i Greci, i quali, a differenza degli Indiani, avevano una certa ripugnanza al considerare e forse l'impossibilità di concepire numeri grandi (1). Vedremo fra breve come Archimede (n. 8) e poi Apollonio (n. 9) abbiano insegnato ad indicare con gli elementi testè descritti tutti i numeri immaginabili.

Calcolo digitale e « numeratio calcularis ».

3. Trovato un sistema per indicare i numeri che successivamente s'incontrano nella serie naturale dei numeri, si possono (intendendo la parola *potere* in senso astratto) eseguire tutte le operazioni aritmetiche, e, con sufficiente facilità, almeno l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione. Che i Greci sapessero effettuare tal genere di calcolo è attestato da un passo del VII Libro della Storia di Erodoto (2), ove è eseguito il lungo computo della forza dell'esercito persiano e della quantità di vettovaglie da esso consumate; però un altro passo dello stesso scrittore (3), ove in una divisione è commesso un grave errore, fa credere che la loro abilità logistica fosse di mediocre portata. Che essi poi sapessero ajutarsi con le dita è indicato dalle parole πεμπάζειν che incontrasi nell'*Odissea* (4), ed è confermato da un passo delle *Vespe* di Aristofane (5), ove è proposto di calcolare " sulle dita „ tanto le entrate dello stato ateniese, quanto la spesa per pagare i giudici, e poi di paragonare i

(1) Osservazione dell'Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* (Leipzig, 1874), p. 17.

(2) Scrittore del V Sec. a. C.

(3) Cf. Heiberg in *Revue critique d'histoire et de littérature*, T. XI, 1881, p. 379.

(4) Vedi IV, 142. L'osservazione riferita appartiene a F. Hultsch; v. il § 5 dell'articolo *Arithmetica* in *Pauly-Wissowa, Real-Encyclopädie der class. Altertums wissensch.*

(5) Vissuto ad Atene, come ognun sa, circa fra il 444 ed il 380 a. C.

risultati (1). Se si tratta di operazioni con numeri non molto grandi, pel calcolo digitale non occorrono artifici speciali; ma appena si oltrepassi un certo limite (non fisso, ma dipendente dall'abilità del calcolatore) questi si rendono indispensabili. Quali fossero quelli usati nell'antichità dai Greci non ci è noto con certezza; è però assai probabile che non differissero da quelli che descrisse un greco dell'Evo Medio (XIII o XIV Sec. dell'E. v.), Nicolò Artavasde da Smirne di sopranome Rabda. Di costui esistono e vennero di recente integralmente pubblicate (2) due lettere, la seconda delle quali si dimostra scritta nel 1341 (3), tenendo conto del calcolo della Pasqua ivi eseguito *pel corrente anno*. Quella che a noi interessa in questo momento è la prima, quella cioè che comincia pomposamente così: " Esposizione abbreviata e chiarissima della scienza del calcolo, improvvisata a Bisanzio di Costantino, da Nicolò Artavasde da Smirne, aritmetico e geometra, τοῦ Ῥαβδᾶ, dietro richiesta dell'onoratissimo esattore delle imposte, Giorgio τοῦ Χατζύκη, facilissima per quelli che hanno voglia di studiarla ". Il brano di essa (4) che si riferisce al calcolo digitale dei Greci venne pubblicato varie volte (5); esso ci sembra degno di venir qui riferito integralmente, come unico documento capace di far capire come gli antichi potessero, gesticolando, effettuare delle calcolazioni complicate.

Ecco in qual modo si segnano i numeri sopra le mani; la sinistra serve sempre per le unità e le decine, la destra per le centinaja e le migliaja; per numeri mag-

---

(1) « E prima di tutto fa un po' il conto, non colle pietruzze, ma sulle dita di quei contributi, che le città in comune ci recano, poi de' balzelli, che si pagano separatamente, dell'uno per cento, che da molte cose si riscuotono, di quel che rendono il pritaneo, le miniere, i porti, i dazî, e le confische. La somma di queste cose viene ad essere circa due mila talenti. Ora metti dall'altra parte la paga, che si dà ogni anno ai seimila giudici, chè nel paese non ne fu mai numero maggiore, ed essa ci darà la somma di centocinquanta talenti ». *Commedie di Aristofane*, tradotte da D. Capellina (Torino, 1853), p. 80.

(2) P. Tannery, *Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas (texte et traduction)* in *Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque nationale etc.*, T. XXXII, 1e Partie, 1886, p. 121-252. — Dovendo in seguito citare spesso questo lavoro, lo indicheremo coll'abbreviazione *Rabda-Tannery*.

(3) P. Tannery, *Manuel Moschopulos et Nicolas Rhabdas* (Bull. des Sc. math., II Serie, T. VIII, 1884, p. 263-277).

(4) Rabda-Tannery, p. 146-152.

(5) V. Rabda-Tannery, p. 132.

giori bisogna adoperare la scrittura, non essendo le mani sufficienti a rappresentare i numeri. Chiudendo il primo dito, quello piccolo, chiamato *miope* (μύωψ) e stendendo gli altri quattro, tenendoli ritti, tu hai a sinistra un' unità ed a destra un migliajo. Chiudendo, con lo stesso dito, anche il secondo che lo segue, e che si chiama *parameso* (παράμεσος) e *epibato* (ἐπιβάτης), restando aperti gli altri tre, come sopra ho detto, tu hai a sinistra due ed a destra due mila. Chiudendo il terzo, lo *sfacelo* (σφάκελλος) o dito medio, assieme ai primi due, e lasciando stesi gli altri due, cioè l' indice ed il pollice, hai a sinistra tre e tremila a destra. Chiudendo soltanto il medio ed il *parameso*, cioè il secondo ed il terzo dito, e lasciando aperti i tre altri, pollice, indice e *parameso*, hai quattro a sinistra e quattromila a destra. Chiudendo soltanto il terzo o dito medio e stendendo gli altri quattro, hai cinque a sinistra e cinquemila a destra. Chiudendo soltanto l' *epibato* o secondo dito, e lasciando aperti gli altri quattro, tu hai sei a sinistra e seimila a destra. Stendendo ora il *miope* o primo dito in modo da toccare la palma, e tenendo tesi gli altri, tu hai sette o settemila. Stendendo similmente il secondo o *parameso* ed inclinandolo sino ad avvicinarlo il più possibile al cavo della mano e tenendo tesi, come ho detto, i tre altri, cioè il terzo, il quarto ed il quinto, tu rappresenti otto a sinistra ed ottomila a destra. Dando al terzo dito la stessa posizione che ai due precedenti, hai a destra nove ed a sinistra novemila. Aprendo il pollice senza drizzarlo, ma dirigendolo un po' da una parte, e piegando un poco l' indice sinchè tocchi la prima giuntura del pollice, in modo da formare la lettera σ, le altre tre dita avendo la loro posizione naturale e non essendo staccate le une dalle altre, tu rappresenterai a sinistra dieci ed a destra cento. Stendendo in linea retta e verticalmente il quarto dito o indice in modo da figurare la lettera I, i tre primi restando uniti, ma un po' inclinati e formanti un angolo con la palma, infine il pollice sorpassando questi ultimi e toccando l' indice, tu indichi venti e duecento. L' indice ed il pollice stesi ed inclinati in modo da toccarsi con le loro estremità, mentre le altre tre dita sono unite e stese secondo la loro posizione naturale, significano trenta e trecento. Le quattro prime dita stese direttamente, mentre che il pollice ha la forma della lettera Γ sorpassando l' indice dal lato esterno, significano quaranta a sinistra e quattrocento a destra. Le quattro prime dita essendo similmente aperte direttamente ed unite, mentre che il pollice figura la lettera Γ dal lato interno sulla base dell' indice, significano cinquanta e cinquecento. Partendo dalla stessa figura e piegando in cerchio l' indice attorno al pollice in modo da fargli toccare la falange intermedia fra la prima e la seconda giuntura, mentre l' estremità dell' indice va a toccare la base del pollice, si indica sessanta e seicento. Le tre prime dita essendo aperte nel modo che più volte indicammo, il pollice applicato contro l' indice e quest' ultimo abbracciando come una spirale l' estremità del pollice, significano settanta e settecento. Le tre prime riunite ed inclinate ad angolo dalla parte del palmo, il pollice sorpassando il dito medio o terzo, toccando la terza falange (quella contigua alla radice) di questo dito, ed applicato sul palmo, mentre che l' indice, disposto sotto il pollice e piegato attorno alla prima giuntura di quest' ultimo, tocca col suo estremo la base del pollice, significa ottanta od ottocento. Se finalmente si chiude il pugno, tenendo il pollice diritto, e poi si stendono le tre prime dita lasciando l' indice nella posizione di chiusura, si rappresenta a destra novanta e novecento a sinistra (1).

(1) Op. cit. p. 146-152.

4. Mediante questo metodo (il quale ricorda assai quello in uso per comunicare con i sordo-muti) si era in grado di designare qualunque numero di quattro cifre, nonchè una miriade. Che i Greci non si siano arrestati a questo limite, lo afferma un poligrafo del V Sec. dell'E. v., Marziano Capella (1); come lo sorpassarono non è insegnato da alcun antico scrittore; ma il procedimento a cui si attennero è probabilmente quello che il Venerabile Beda descrive nel trattato *De loquela per gesta digitorum* e nel quale si usa porre le mani sul capo o sul seno. Più minuti particolari non ci interessano; ma rilevante per noi è il fatto che i Greci ben presto si avvidero della complicazione dei procedimenti digitali e ricorsero ad altri espedienti. Primo di questi è l'impiego delle pietruzze (*calculi* dei latini, donde deriva la parola " calcolo "), che si trova menzionato, a tacere di innumerevoli altri luoghi, nel passo delle *Vespe* di Aristofane che citammo nel n. prec. Per effettuare in tal modo le operazioni aritmetiche era in uso una tavola, detta ἄβαξ o ἀβάκιον (donde la nostra parola " abaco " nel senso di ausiliare pel calcolatore) sulla quale i gettoni venivano allineati in tante orizzontali (2); è in sostanza il metodo che nel Medio Evo ebbe tanta diffusione sotto il nome di *numeratio calcularis*. Quello che va avvertito si è che tutti i tentativi fatti sino ad ora per dimostrare nei Greci la conoscenza di macchine aritmetiche, somiglianti a quelle sfruttate da quasi tutti i popoli civili moderni, debbono giudicarsi per non riusciti; può darsi che ad essi non siano rimaste ignote, ma nulla autorizza ad affermarlo con sicurezza. Tutt'al più si può ritenere che, coll'andare del tempo, sulla tavola per calcolare sia stata stesa della polvere su cui scrivere dei segni rappresentanti i numeri; ma ciò non può essere accaduto che posteriormente all'invenzione della numerazione scritta, a cui ora ci volgiamo.

Numerazione scritta.

5. Il modo più semplice e naturale per indicare un numero (tanto semplice e naturale che non è ancora completamente scom-

(1) *De Nuptiis*, Lib. VIII, p. 244 dell'ed. curata da Grozio nel 1599.

(2) Per la derivazione della parola ἄβαξ, veggasi Th. H. Martin, *Les signes numéraux et l'arithmétique etc.*, p. 290 (Annali di matematica, T. V, 1863).

parso (1)) consiste nel ripetere un medesimo segno (un tratto od un punto) tante volte quante sono le unità contenute in quel numero (2); che i Greci se ne siano serviti attesta una iscrizione, che risale al 391 a. C., ove trovasi il seguente passo:

ἔτεος | | | | | | | | (3);

inoltre — nota il Nesselmann (4) — tale uso viene esplicitamente dichiarato da Giamblico.

Questo metodo primitivo di numerazione scritta diviene impraticabile per numeri un po' grandi; non solo lo scriverli riesce fastidioso, ma il leggerli è difficilissimo. Perciò venne surrogato da un altro, che già vedemmo usato da Erodoto; quello cioè di indicare ogni numero colla parola che ne esprime il nome (5). Tale sistema ben presto subì una semplificazione spontanea; quella che consiste nello scrivere, invece che questi nomi per esteso, soltanto le loro iniziali. Siffatto concetto, così naturale che sarebbe vano ogni tentativo per determinarne l'autore, è il fondamento del primo sistema di numerazione scritta di cui gli Ellèni si servirono. Nel quale infatti le lettere

I , Π , Δ , Η , Χ , Μ

sono adoperate per indicare rispettivamente i numeri

1 , 5 , 10 , 100 , 1000 , 10000;

---

(1) I Cinesi moderni se ne servono tuttora: v. Unger, *Grundzüge der Geschichte der elementaren Arithmetik*, I Thl. (Leipzig, 1883). p. 5.

(2) A questo sistema fa allusione Nicomaco da Gerasa nell'esordio del VI Cap. del II Libro dell'*Aritmetica;* ove si legge: « Anzitutto bisogna riconoscere che ogni lettera indicatrice di un numero, ad es. ι per 10, κ per 20, ecc., per volere dell'uomo e per convenzione, serve a rappresentare quel numero; ma il mezzo naturale, meno artifizioso, epperò più semplice, per indicare i numeri sarebbe l'enumerazione delle unità ivi contenute. Così indicando l'unità con α, α designerebbe *uno;* scrivendo due unità, cioè αα si rappresenterebbe *due*, ecc. Solo così si potrebbero rappresentare i numeri piani e solidi, e dichiararne la natura ».

(3) M. Cantor, *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle, 1863), p. 113.

(4) *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842), p. 242, nota 43).

(5) È il concetto stesso che generò le cifre arabico-persiane dette Dîvânî; cfr. Cantor, *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed.), p. 666.

la scelta della prima fra tali lettere fu fatta ispirandosi all' antico sistema dei tratti verticali (v. sopra); la scelta della quarta fu suggerita — secondo il parere del Wallis (1) — da ciò che in origine per indicare il *cento* serviva la parola Ἡκατόν; l' elezione delle altre ha per base la considerazione delle iniziali delle parole Πέντε, Δέκα, Χίλιοι, Μυριοι. Il segno Γ, che talvolta trovasi invece di Π, non è altro che un' illecita deformazione di questa lettera. Mediante questi simboli se ne costruiscono altri per indicare i numeri

50 , 500 , 5000 , 50000

ponendo risp. le lettere Δ, Η, Χ, Μ fra le due aste verticali delle lettere Π. Giustapponendo i nuovi simboli agli antichi è evidentemente possibile di rappresentare qualunque numero; il modo con cui la sovrapposizione vien fatta si apprende dai documenti superstiti, i quali però dimostrano che questo sistema non fu applicato sempre rigorosamente sotto questa forma; le varianti (2) interessano il paleografo e l' epigrafologo, non il matematico.

6. Il sistema di numerazione scritta delineato nel n. precedente si vede applicato in una celebre tavola marmorea trovata a Salamina nel 1846 (3); esso porta di consueto il nome di Erodiano, in memoria del grammatico e storico bizantino che per primo metodicamente lo espose, desumendolo dall' esame di antiche iscrizioni (4); ma esso venne, in processo di tempo, abbandonato in generale perchè incomodo nelle circostanze più comuni e se ne riserbò l' uso nelle epigrafi (5): si posero in sua vece altri nei quali alle lettere dell' alfabeto vengono attribuiti significati e valori di numeri.

Il primo di questi nuovi sistemi (6) consiste nella semplice

(1) *Opera mathematica*, T. I (Oxoniae, 1695), p. 45.

(2) Cfr. Woisin, *De Graecorum notis numeralibus* (Kiliae, 1886), p. 27.

(3) Rangabé e Vincent in *Revue archéologique*, 1846, p. 296 e 401. Cfr. Gow, *A short History of Greek Mathematics* (Cambridge, 1884), p. 33-37.

(4) Veggasi il brano riferito dallo Stephanus nell' appendice al *Thesaurus linguae graecae* (T. V, p. 205 e seg.).

(5) Similmente in Europa, dopo l' introduzione delle cifre arabe, i numeri Romani sono adoperati soltanto sull' epigrafia.

(6) V. Cantor, op. cit., p. 115.

convenzione di indicare i primi 24 numeri della serie naturale con le 24 lettere dell'alfabeto jonico prese nel loro ordine naturale.

La nessuna elasticità di tal metodo lo fece ben tosto abbandonare per un altro in cui i 27 numeri 1, 2, ... 9, 10, 11, ..., 90, 100, ..., 900 sono indicati con le lettere dell'alfabeto jonico al quale sono aggregati i tre episemi (ἐπίσημα). La corrispondenza stabilita fra numeri e lettere è indicata dalla tabella seguente:

1 = α, 2 = β, 3 = γ, 4 = δ, 5 = ε, 6 = ϛ (στίγμα), 7 = ζ, 8 = η, 9 = ϑ
10 = ι, 20 = κ, 30 = λ, 40 = μ, 50 = ν, 60 = ξ, 70 = ο, 80 = π, 90 = ϟ (κόππα)
100 = ρ, 200 = σ, 300 = τ, 400 = υ, 500 = φ, 600 = χ, 700 = ψ, 800 = ω, 900 = ϡ (σαμπῖ);

i numeri della prima linea venivano detti (1) μοναδικοί ἀριθμοί, quelli della seconda δεκαδικοί e quelli della terza ἑκατονταδικοί.

Col mezzo di questi caratteri venivano espressi tutti i numeri di tre cifre, ponendo di regola prima il numero delle centinaja, poi quello delle decine e da ultimo quello delle unità, ordine questo conforme ad un principio generale che governa tutte le numerazioni scritte conosciute, e che l'Hankel ha scoperto (2). Così per indicare il numero 783 un antico Greco avrebbe scritto ψπγ. Per evitare poi gli equivoci che avrebbero potuto nascere scambiando i numeri con parole, si soleva porre sui numeri un tratto orizzontale od anche un tratto seguito da un accento (3): quindi propriamente (per riprendere l'esempio precedente) il simbolo di 783 è $\overline{\psi\pi\gamma}$. Aggiungiamo che talora, per iscopi mnemonici, la decomposizione in centinaja, decine, unità veniva surrogata con altre; a dimostrarlo valga il seguente esempio sorto dal desiderio di ricordare con parola il numero dei giorni dell'anno solare:

$$\nu\epsilon\iota\lambda o\varsigma = 50 + 5 + 10 + 30 + 70 + 200 = 365.$$

---

(1) Rabda-Tannery, p. 144.

(2) Tale principio afferma che in tutti i sistemi fondati sulla giustapposizione di caratteri indicanti numeri di ordini differenti, quelli di ordine superiore stanno prima (nel senso in cui procede la scrittura) di quelli di ordine inferiore. Cfr. Hankel, op. cit., p. 32. Il Woisin (p. 16 dello scritto succitato) ha giudicata falsa la legge di Hankel, il che ci sembra esagerato; tuttavia crediamo, ora come dieci anni or sono (v. *Bibliotheca mathematica*, 1889, p. 120), che sarebbero assai utili degli studî per determinare il campo di applicabilità della legge suddetta.

(3) Heiberg, in *Philologus*, T. XLIII, 1884, p. 329.

L' ambiente aritmetico, a cui si estende l' or delineato sistema di numerazione scritta (1), si manifestò ben presto assai limitato, innumerevoli essendo le contingenze in cui si dovettero considerare dei numeri superiori a 999. Per estenderne la portata si convenne di indicare con opportuni apici (a destra ed in basso) i primi nove multipli di 1000, di porre cioè:

1000 = ͵α , 2000 = ͵β , 3000 = ͵γ , ... , 9000 = ͵ϑ;

si ottennero così i Χιλιονταδικοί ἀριθμοί (2), e si giunse a rappresentare tutti i numeri inferiori a 10000. Similmente si pose

100000 = ͵ι , 200000 = ͵κ , 300000 = ͵λ , ... , 900000 = ͵ϟ,
1000000 = ͵ρ , 2000000 = ͵σ , 3000000 = ͵τ , ... , 9000000 = ͵ϡ,

e si fu in grado di scrivere tutti i numeri inferiori a dieci milioni; ad esempio:

$\overline{͵\psi\,͵\pi\,͵\gamma\ \upsilon\nu\vartheta} = 783459.$

Invece di adoperare gli apici anche per indicare i numeri superiori a 10000, altri raggiunse lo stesso intento con un altro metodo: si indicò con la lettera M o la sillaba Mυ (scritta talora $\overset{\upsilon}{\mathrm{M}}$) il numero 10000 (μυριάδες) e si considerò ogni numero superiore a 10000 come un multiplo di questo più un numero inferiore allo stesso; così (attenendoci all' esempio precedente) considerando essere

783459 = 78 miriadi + 3459

(1) Eguale estensione possiede un sistema di numerazione segnalato dall' Heilbronner (*Historia matheseos universae*, Lipsiae 1742, p. 735-737; cfr. Nesselmann, op. cit., p. 83-84), nel quale si usano dei curiosi segni speciali, formati ciascuno da un tratto verticale a cui si uniscono dei tratti secondarî in alto a destra per le unità, in alto a sinistra per le decine, in basso a destra per le centinaja ed in basso a sinistra per le migliaja. Crediamo estraneo al còmpito nostro l' arrestarci sopra questo sistema; perchè, se ne è dubbia l' origine (v. Cantor, op. cit., p. 167 e 397; Friedlein, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und der Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis. 13. Jahrhundert*, Erlangen 1869, p. 11), è certo che non appartiene al popolo di cui ci occupiamo.

(2) Rabda-Tannery, p. 144.

si scrisse

$$\overline{o\eta\,\mathrm{M}\,.\,{}_{\prime}\gamma\upsilon\nu\vartheta} \quad \text{oppure} \quad \overline{o\eta\,\mathrm{M}\upsilon\,.\,{}_{\prime}\gamma\upsilon\nu\vartheta}$$

A questo metodo alcuni arrecarono delle modificazioni, o surrogando la lettera M — o la sillaba Mυ — con un semplice punto (esempî di questo sistema s' incontrano in Diofanto), o scrivendo il numero delle miriadi sopra la lettera M; esempî di numeri scritti come segue

$$\overset{o\eta}{\mathrm{M}}\;\overline{{}_{\prime}\gamma\upsilon\nu\vartheta}$$

sono frequenti in Eutocio ed anche in Diofanto. In luogo della lettera M un papiro recentemente scoperto (1), e di cui avremo da occuparci a più riprese, porta uno dei tre segni seguenti:

$$\cdot^{\mathrm{I}}\;,\;\underset{\bullet}{\alpha}\;,\;\underline{\alpha}\,.$$

L' estensione così acquisita dal primitivo sistema di numerazione è sufficiente nelle circostanze comuni; ma per la perfezione teorica di esso era necessario liberarlo dai limiti ad esso imposti: come e per opera di chi si raggiunse questo intento più tardi, vedremo fra breve (n. 8 e 9), dopo di avere brevemente trattato la questione delle origini del sistema esposto.

7. Questo sistema presenta un' analogia sostanziale con quello adoperato dagli Ebrei e dagli Arabi (2), onde per molto tempo si è creduto che i Greci avessero abbandonato il sistema ricostruito da Erodiano quando vennero a conoscere quello in uso presso i popoli dell' Oriente; e si è considerato siccome una conferma a tale congettura l' uso dei tre *episemi,* detriti di un antico alfabeto non adoperato in tempi storici dagli Ellèni. Ma contro di essa vennero addotti i fatti seguenti (3): 1.° L' alfabeto greco deriva da quello fenicio (cfr. L. I, n. 2), ma i Fenici non si servirono mai dell' alfabeto per indicare i numeri. 2.° Presso gli Ebrei le lettere

(1) J. Baillet, *Le papyrus mathématique d' Akhmîm* (Paris, 1892), p. 8.

(2) Cfr. Montucla, *Hist. des Math.*, T. I (2.e ed.), p. 46, e Nesselmann, p. 78-79, ove sono messi di fronte i segni numerali che usano i Greci, gli Ebrei e gli Arabi.

(3) Gow, op. cit., p. 43-48.

nel significato di numeri si trovano bensì nei *sicli* (monete) di Simone Maccabeo (141-137 a. C.), ma nulla autorizza a farlo risalire ad un'epoca anteriore; per converso esistono presso i Greci prove indiscutibili dell'antichità dell'impiego delle lettere per designare i numeri. 3.° L'alfabeto ebraico, contenendo soltanto 22 lettere, si prestava meno ancora di quello greco alla designazione di numeri. Per tali ragioni, ricordando inoltre la costante tendenza degli scritti biblici a fare credere tutto estremamente antico e prettamente autoctono, si concluse a ragione essere assai più probabile che i Greci abbiano essi stessi inventato il sistema numerale dianzi descritto e che l'abbiano poi insegnato agli Ebrei ed agli Arabi.

Ammessa o non questa conclusione, resta il problema: a qual epoca risale tale invenzione? Tale questione è importante, ma difficile. Per avvicinarsi alla sua soluzione, si noti che i canti dell'*Iliade* vennero numerati da Zenodoto (il quale fiorì circa nel 280 a. C.) col mezzo delle 24 lettere dell'alfabeto jonico, e che lo stesso procedimento venne applicato alle opere di Aristotele. D'altronde l'uso degli episemi — lettere abbandonate e per la circostanza esumate — fa credere che quel sistema sia stato, non già una produzione popolare, ma piuttosto frutto degli studî di qualche archeologo. Se ora si tien conto del tempo in cui vennero scritti i più antichi papiri ove quel sistema si vede applicato, si arriva a concludere, che — contrariamente a quanto erasi prima creduto — tale sistema vide la luce in Alessandria, non prima del III Sec. a C., cioè ai tempi di Tolomeo Filadelfo (1).

D'accordo con tale determinazione cronologica sta il fatto che il perfezionamento ulteriore che il sistema medesimo ricevette (v. i seguenti n.i 8 e 9) è opera di due scienziati appartenenti al periodo aureo della geometria greca; sicchè parrebbe che la questione di stabilire una buona numerazione scritta sia stata prima posta e poi conservata all'ordine del giorno durante il periodo greco-alessandrino.

---

(1) Questa tesi venne sostenuta dal Gow nel c. l. e poi accolta dai giudici più competenti in materia: veggansi infatti le recensioni dell'opera del Gow fatte da P. Tannery (Bulletin des Sciences math., 2.a Série, T. IX, I Partie, p. 160-161), M. Cantor (Zeitschr. f. Math. und Phys., T. XXX, hist.-lit. Abth., p. 122-127) e S. Günther (Jahrb. über die Forschritte der Math., T. XVI, p. 3-6). Vedi anche Cantor, *Vorl. über Gesch. der Math.*, T. I, 2.a ed., (Leipzig, 1894) p. 115.

Le « ottadi » di Archimede.

8. Il sistema di numerazione dei Greci acquistò illimitata potenza per opera di Archimede, il quale a tale questione dedicò uno scritto *ad hoc,* diretto a Zeusippo ed intitolato *Principî* (Ἀρχαί). Tale lavoro andò sgraziatamente perduto, ma perduto non andò il frutto delle speculazioni archimedee, la cui quintesenza è consegnata in un'opera a noi già nota (v. L. III, n. 22), quella cioè intitolata nell'originale Ψαμμίτης e nelle prime traduzioni latine *De numero arenae;* noi la designeremo, ora come già facemmo in passato, col nome di *Arenario*, derivato da quello (*Arenarius*) usato dal Wallis.

Ricordiamo che lo scopo immediato che si propose conseguire con quest'opera il sommo Siracusano è di sradicare il pregiudizio, allora diffusissimo, che il numero dei grani di sabbia sparsi sulla terra fosse infinito; gli elémenti astronomici della dimostrazione da lui congegnata vennero da noi enumerati nel L. III (n. 22); gli ingredienti aritmetici invece sono racchiusi nel seguente brano:

Furono dati nomi ai numeri sino ad una miriade ed al di là di una miriade i nomi che si diedero sono abbastanza noti; non si fece che ripetere una miriade sino a dieci mila miriadi (1). Orbene i numeri ora indicati e che vanno sino ad una miriade di miriadi siano chiamati numeri ***primi*** (πρῶτοι), mentre una miriade di miriadi di numeri primi sia chiamata unità dei numeri ***secondi*** (2). Contiamo mediante tale unità per decine, centinaja, migliaja e miriadi di queste unità sino ad una miriade di miriadi. Una miriade di miriadi di numeri secondi sia chiamata unità dei numeri ***terzi*** (3). Contiamo col mezzo di queste unità per decine, centinaja, migliaja e miriadi di queste unità sino ad una miriade di miriadi; una miriade di miriadi di numeri terzi sia chiamata unità dei numeri ***quarti*** (4), una miriade di miriadi di numeri quarti sia detta unità dei numeri ***quinti*** (5), e continuiamo a dare siffatti nomi ai numeri seguenti (6) sino alle miriadi di miriadi di numeri centomilione-

(1) V. n. 6.

(2) Essendo una miriade $= 10^4$, i numeri ***primi*** sono tutti quelli compresi fra 1 e $10^8 - 1$, i limiti inclusi, e 10^8 è l'unità dei numeri *secondi*.

(3) Esso vale $10^8 \,.\, 10^8 = 10^{2 \cdot 8}$.

(4) Il suo valore è $10^8 \,.\, 10^{2 \cdot 8} = 10^{3 \cdot 8}$.

(5) È espressa da $10^8 \,.\, 10^{3 \cdot 8} = 10^{4 \cdot 8}$.

(6) L'unità dei numeri n^{mi} è $10^{(n-1)8}$.

simi (1). — Abbenchè questa massa di numeri possa bastare, si può spingersi più innanzi. Infatti i numeri di cui abbiamo parlato si chiamino ***numeri del primo periodo*** e all'ultimo di essi (2) si dia il nome di ***unità dei numeri primi del seconda periodo.*** Poi una miriade di miriadi di numeri primi del secondo periodo sia chiamata ***unità dei numeri secondi del secondo periodo*** (3). Una miriade di miriadi di numeri secondi del secondo periodo si consideri come ***unità dei numeri terzi del secondo periodo*** (4). E seguitiamo a dare dei nuovi nomi analoghi a tutti i numeri seguenti (5) sino a quelli dell'ordine centomilionesimo (6). Inoltre l'ultimo numero del secondo periodo venga denominato unità dei numeri primi del terzo periodo e continuiamo così (7) sino al periodo centomilamilionesimo (8).

Quì Archimede si arresta, ma evidentemente il suo modo di procedere potrebbe venire spinto oltre senz'alcun limite. Egli aggiunge:

Denominati così i numeri, se dei numeri continuamente proporzionali, a partire dall'unità sono collocati uno di seguito all'altro e se il numero più prossimo all'unità è 10, gli otto primi numeri, compresa l'unità (9), saranno quelli che chiamammo numeri ***primi;*** gli otto seguenti saranno quelli che dicemmo ***secondi,*** e gli altri saranno denominati nello stesso modo a norma della distanza fra la loro ottade (ὀκτάδος) e quella dei numeri primi. Perciò l'ottavo numero della prima ottade sarà mille miriadi, mentre il primo della seconda, essendo il decuplo del precedente sarà una miriade di miriadi; l'ultimo numero della seconda ottade sarà mille miriadi di numeri secondi, e finalmente il primo numero della terza ottade, essendo il

---

(1) L'ultimo dei numeri considerati da Archimede è pertanto $10^{8 \cdot 10^8}$, cioè il numero che noi scriviamo 1 seguito da 800 milioni di zeri.

(2) Cioè al numero $10^{8 \cdot 10^8}$.

(3) Essa è eguale a $10^8 \,.\, 10^{8 \cdot 10^8} = 10^{8(10^8+1)}$.

(4) Vale $10^8 \,.\, 10^{8(10^8+1)} = 10^{8(10^8+2)}$.

(5) Le unità successive hanno tutte le forme

$$10^{8n} \,.\, 10^{8 \cdot 10^8}.$$

(6) L'ultimo numero nasce facendo $n = 10^8$ nella formola della nota precedente onde vale

$$10^{8 \cdot 10^8} \,.\, 10^{8 \cdot 10^8} = 10^{2 \cdot 8 \cdot 10^8}.$$

(7) L'unità dell'$(n+1)^{mo}$ periodo sarà

$$10^{n \cdot 8 \cdot 10^8}.$$

(8) L'ultimo numero a cui si perviene è espresso da

$$10^{8 \cdot 10^{2 \cdot 8}}.$$

che si ottiene facendo $n = 10^8$ nella formola della nota precedente. Per esprimerlo nel nostro sistema bisognerebbe scrivere 1 seguito da 80000 milioni di milioni di zeri.

(9) Cioè $1 \,,\, 10 \,,\, 10^2 \,,\, \ldots \,,\, 10^7$.

decuplo del precedente cioè una miriade di miriadi di numeri secondi. È pertanto evidente che esisteranno quante si vogliano ottadi (1).

Per facilitare il computo con questi numeri Archimede espone un teorema che noi esprimeremmo coll'identità: $10^m . 10^n = 10^{m+n}$ (2); applicando esso e tutti gli altri principî geometrici, astronomici ed aritmetici da lui previamente stabiliti, il celebre geometra giunge a concludere che esiste un numero inferiore a 10^{63} che rappresenta il numero dei grani di sabbia che capirebbero in una sfera concentrica alla terra e giungente alle stelle fisse. E finisce dicendo:

Io penso, o Gelone, che queste cose sembreranno poco credibili a quelli che non sono versati nelle matematiche; ma appariranno dimostrate a coloro che coltivarono queste scienze e si applicarono a conoscere le distanze e le grandezze della terra, del sole, della luna e del mondo intero.

Ed invero nessuno può negare che Archimede abbia fatto ciò: ma egli fece ancor più; coll'*Arenario* egli insegnò ai suoi connazionali, rifuggenti dal considerare numeri grandi, che questi sono enti aritmetici trattabili al pari di quelli che li precedono nella serie naturale; inoltre rivolse la loro attenzione verso l' infinitamente grande aritmetico, come, coltivando il metodo di esaustione, li aveva resi famigliari coll'infinitamente piccolo geometrico. Basti questo a dimostrare come l'*Arenario,* ultima fra le produzioni autentiche che dovremo considerare della vittima di Marcello, meriti un posto distinto non solo nella raccolta delle opere di Archimede, ma eziandio nella letteratura matematica dei Greci.

Le « tetradi » di Apollonio. — Il preteso 0 dei Greci.

9. L'*Arenario* ci si presenta come un lavoro sì bene architettato, le indagini aritmetiche ivi consegnate sono condotte in modo così

(1) Una qualunque è del tipo seguente:

$$10^{8k} \quad , \quad 10^{8k+1} \quad , \ldots . \quad , \quad 10^{8k+7} \, (k = 1 \, , \, 2 \, , \ldots .).$$

(2) Questo teorema, il quale abilita a surrogare una moltiplicazione con una addizione, venne da taluni considerato come germe della teoria dei logaritmi; anzi alcuni spinsero la cosa al punto da chiamare *di Archimede* i logaritmi a base 10: v. pag. 72 della Dissertazione che segue l'*Elogio di A. Vespucci* stampato a Firenze nel 1788; inoltre una nota del Delambre in *Oeuvres d'Archimède,* trad. Peyrard, (T. II, Paris 1808, p. 428).

esauriente, che non deve far meraviglia il non avere Archimede trovati imitatori o seguaci. Il campo sembrava così esaurito, la miniera si presentava talmente povera di metallo, che pochi devono essersi sentiti incoraggiati a seguire le orme del Siracusano. Tuttavia Pappo ha commentato, nel II Libro della sua *Collezione matematica* (1), un' opera aritmetica di Apollonio Pergeo, nella quale la distribuzione in gruppi di tutti i numeri immaginabili proposta da Archimede viene un po' modificata. Se quest' opera apolloniana fosse, come crede l' Heiberg (2), quella (L. II, n. 43) da Eutocio citata sotto il nome di 'Ωκυτόκιον (3) ed avente per iscopo di spingere l' approssimazione di π oltre il limite raggiunto da Archimede, non possiamo asserire, come, se escludiamo tale identità, non possiamo accertare le relazioni che avrebbero esistito fra le due opere del celebre geometra. Quello che va osservato si è che il lavoro dichiarato da Pappo doveva venire ritenuto come classico nell' antichità dal momento che questo commentatore, designandolo due volte come στοιχεῖον, lo pone allo stesso livello degli *Elementi* di Euclide (cfr. L. II, n. 8).

La modificazione al metodo di Archimede insegnata nel frammento superstite nel II Libro della *Collezione* consiste nel surrogare le " ottadi " del Siracusano con periodi minori detti " tetradi ". In conseguenza i numeri compresi fra 1 e 10000 si riguardavano come costituenti una classe i cui elementi erano detti μονάδες ed eventualmente indicati col segno μ^{α}. I multipli di 10000 non superiori a 10000^2 si ritenevano come costituenti una seconda classe di numeri indicati col nome di μυριάδες ἁπλαῖ e col simbolo μ^{β}. Similmente i multipli di 10000^2 non superiori a 10000^3 si conside-

(1) *Pappo ed. Hultsch.* p. 2-28, e 1212-1217. Nel giudicare il contenuto di questa parte della *Collezione* bisogna tener conto di due fatti; cioè che Pappo non distingue ciò che toglie da Apollonio da ciò che aggiunge del suo, e che quella parte è assai deturpata e corrotta. Si veggano le correzioni proposte dal Nesselmann (*Die Alg. der Griechen,* p. 129) e discusse da P. Tannery (*L'arithmétique des Grecs dans Pappus,* Mém. de la Societé de Bordeaux, II Serie, T. III, 1880, p. 355-356).

(2) *Philologus,* T. XLIII, 1884, p. 488. Non dissimile è il parere del Friedlein (op. cit., p. 78), secondo cui l'ὠκυτόκιον avrebbe contenuto delle tavole di moltiplicazione, applicate poi al calcolo del rapporto della circonferenza al diametro. Per altre congetture sul contenuto di quell' opera, veggasi il § 3 dell' articolo di F. Hultsch *Zur Kreismessung des Archimedes* (Zeitschrift für Math. und Phys., T. XXXIX, 1894).

(3) Archimede ed. Heiberg, T. III, p. 300.

ravano come appartenenti ad una terza categoria di numeri chiamati μυριαδές διπλαῖ e rappresentate col simbolo μ^{γ}; e così via dicendo. In conseguenza ogni numero veniva scritto sotto la forma $\Sigma\, A_r \,.\, \overline{10000}^r$, ove gli A_r sono numeri interi inferiori a 10000; parecchî esempî del modo in cui venivano scritti i numeri in base a questo procedimento sono offerti da Pappo (ed. Hultsch, p. 24).

Da tutto ciò emerge che a base del sistema di Apollonio sta lo stesso concetto che usò Archimede. Ad Apollonio però spetta il merito di avere adattate le considerazioni esclusivamente teoriche di Archimede alle esigenze della pratica, estendendone la portata dalla numerazione parlata alla numerazione scritta. A ciò si deve probabilmente l'avere il procedimento apolloniano finito per trionfare su quello archimedeo. La persistenza di quello è dimostrata da una serie di simboli numerali che il Camerario segnalò (1), che venne poi giudicata parto di ricopiatori moderni (2) inspirantisi all'esempio degli Ebrei (3), ma che oggi si deve considerare come appartenente alla letteratura greca, essendo adoperata nei manoscritti delle *Lettere* del Rabda (4). Esso consiste nell'indicare un multiplo di 10000 ponendo due punti al disopra del numero corrispondente; ponendone quattro si indica un multiplo di 10000^2, ponendo sei uno di 10000^3 ecc.; si ha ad esempio:

$$\ddot{\beta} = 20000 \quad ; \quad \overset{::}{\delta} = 400000000 \quad : \quad \overset{\vdots\vdots}{\alpha} = 1000000000000 \text{ (5).}$$

10. Prima di chiudere questa esposizione dei segni numerali in uso presso gli antichi Greci, non possiamo esimerci dal far cenno di una questione importante sollevata dal Delambre, e cioè la seguente: ebbe quel popolo cognizione dello zero? Ad essa il celebre astronomo, fedele alla sua tendenza di attribuire agli antichi molte nozioni possedute dai moderni, era convinto si potesse dare ri-

(1) *De graecis latinisque numerorum notis etc.* (Lipsiae, 1569); cf. Nesselmann, op. cit., p. 81.

(2) Friedlein, op. cit., p. 11.

(3) Unger, *Grundzüge der Geschichte der elementaren Arithmetik*, I Tl. (Leipzig, 1883), p. 8.

(4) Rabda-Tannery, p. 146.

(5) È forse a questo sistema che si inspirò Newton nel proporre il suo sistema di notazioni per le flussioni successive di una stessa quantità?

sposta affermativa (1), e si credette poi autorizzato a pronunciarsi in questo senso, dopo di avere rilevato che, nell' *Almagesto*, Tolomeo, quando ha da indicare un angolo col metodo sessagesimale, scrive $\bar{o}$ ogniqualvolta nella misura di esso angolo mancano i minuti, o i secondi. Il perchè di tale uso di quel segno fu trovato dal Delambre in ciò che questa lettera, significando 70, non riceve applicazioni quando si usino frazioni sessagesimali, essendo un numero di minuti o di secondi al massimo 59. L'opinione del Delambre, probabilmente per la grande autorità di chi la sostenne, venne generalmente accettata in Francia (2). Ma la debolezza dell' argomento con cui egli credette dimostrarla fu avvertita dal Nesselmann (3), il quale fece osservare che $\bar{o}$ altro non è che l'iniziale della parola οὐδέν (nulla), naturalmente chiamata a segnalare l'assenza di gradi o di frazioni di grado; osservazione questa che a ragione riscosse il plauso generale (4). Ma, tutti non essendo persuasi di tale replica, ad altri argomenti si ricorse, per puntellare il crollante edificio eretto dal Delambre. Infatti il celebre Niebuhr (5) credette col Playfair di trovare un argomento a favore della tesi suddetta in un palimpsesto vaticano; ma un'analisi accurata di questo (6) lo rivelò inconsistente. D'altronde il Cantor (7) dimostrò inaccettabile la spiegazione data dal Böckh per un passo di un'iscrizione ateniese, in cui sembrava si trovasse uno zero. Per conseguenza, in base ai documenti scoperti e decifrati sino ad oggi, siamo autorizzati a negare ai Greci la conoscenza dello zero.

---

(1) « Sans doute Archimède avoit un caractère qui lui tenoit lieu de notre zéro ». *Oeuvres d'Archimède*, trad. Peyrard, T. II (Paris, 1808), p. 428.

(2) V. p. es. Chasles. *Ap. historique* (II ed., Paris, 1875, p. 475-6); Vincent in *Journ. de math. pures et appliquées*, T. IV, 1839, p. 267.

(3) Op. cit., p. 139.

(4) V.: Woepcke in *Journal asiatique*, VI Serie, T. I, 1863, p. 466; Friedlein, op. cit., p. 84; Gow., op. cit., p. 49; ecc.

(5) *M. Tullii Ciceronis Orationum etc.* (Roma, 1820), p. 16-17.

(6) V. una lettera del Prof. Spezi inserita nei *Math. Beiträge* etc. del Cantor, p. 386-388.

(7) *Math. Beitr.*, p. 124-126; cf. anche Friedlein, op. cit., p. 74.

Frazioni.

11. Tre sorta di frazioni s'incontrano negli scritti aritmetici dei Greci.

I. In origine, adottando il concetto costantemente in uso presso gli Egiziani, gli Ellèni adoperavano soltanto frazioni aventi per numeratore l'unità (1); consideravano quindi ogni numero come una somma di termini della serie, illimitata in due sensi:

$$\ldots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots;$$

in tale costume F. Hultsch (2) trovò la spiegazione della frase μονάς ἐστιν εἶπον αριθμοῦ καὶ μορίων μεθόριον, attribuita ad alcuni Pitagorici (3). In certi casi un numero era rappresentato, non con la somma di un intero e di frazioni fondamentali, ma come differenza fra interi e frazioni o tra frazioni; valgano a provarlo i due esempi seguenti tolti, il primo da Erone (4), ed il secondo da Rabda (5):

$$\sqrt{63} \text{ circa} = 8 - \frac{1}{16}\ ; \ \frac{36}{109}\left[= \frac{1}{3}\,\frac{108}{109} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{109}\right)\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{327}$$

Per indicare una frazione fondamentale i Greci, al pari degli Egiziani, scrivevano il denominatore (6) sormontato da un accento semplice o doppio, o da altro segno variamente conformato. Segni speciali erano riserbati (anche quì conformemente alle consuetudini egiziane) alle frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ $\left(= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)$. La prima (chiamata ἥμισυ)

(1) Le designeremo brevemente col nome di frazioni *fondamentali;* i Greci adoperavano invece il vocabolo μόρια.

(2) *Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung*, I Abhand. (Abh. d. k. Sächs. Ges. der Wiss., T. XVII, 1895), p. 22.

(3) *Iamblichi in Nicomaci Arithmeticam Introductionem Liber*, ed. Pistelli (Lipsiae, 1894), p. 11, linee 10-11.

(4) *Heronis Alex. geom. et ster. reliq.*, ed. Hultsch (Berolini, 1864), p. 163.

(5) Rabda-Tannery, p. 169.

(6) I Greci consideravano il denominatore come l'omonimo della frazione e questa per l'omonima di quello (τὸ ὁμώνυμον αὐτοῦ μόριον).

era indicata — come praticavano gli Etruschi (1) — con un simbolo variabile da manoscritto a manoscritto, ma che in generale è simile ad un angolo ottuso aperto verso destra e coi lati non rigorosamente rettilinei (2); la genesi di tal segno non è nota; taluno lo fa derivare dall'antico σ (3), altri lo considera come un'abbreviazione della parola ἥμισυ (4), ed altri ancora lo crede nato dal dimezzamento del simbolo O usato dagli antichi Beoti per indicare l'obolo (5). L'altra delle frazioni notevoli, cioè $\frac{2}{3}$, era indicata col nome δίμοιρον e pure con un segno particolare (6), che probabilmente proviene dalla riunione del simbolo di $\frac{1}{2}$ con quello (ς'') di $\frac{1}{6}$.

II. Il sistema delle frazioni fondamentali, malgrado gli inconvenienti che presenta, si conservò a lungo, tanto che si trova in iscritti greci sino all'epoca bizantina, quali sono la *Geometria* di Pediasimo e gli scritti inediti di Isacco Argirio (7). Tuttavia le *Opere* di Erone e le *Lettere* del Rabda fanno vedere come i Greci conoscessero non solo la trasformabilità di ogni quoziente in una somma di frazioni e viceversa, ma anche la utilità che tale trasformazione possiede nella pratica dell'aritmetica; cosicchè ivi le frazioni fondamentali si trovano soltanto nei dati e nei risultati. Più metodicamente si trovano usate le frazioni a numeratore qualunque in Eutocio e Diofanto; sembra però che sempre fossero riguardate come quozienti di due interi, non come numeri di specie particolare.

Per designare una frazione qualunque bisogna indicare numeratore e denominatore, ed alcuni Greci solevano scrivere semplicemente il secondo al di sopra del primo; siffatto costume è attestato

(1) Cfr. Cantor, *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed.), p. 490.

(2) Non avendo a nostra disposizione questo segno scriveremo sempre β'' per indicare $\frac{1}{2}$.

(3) Cantor, *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed., 1894), p. 118.

(4) Hultsch, *Metrologicorum scriptorum reliquae*, T. I (Berlin, 1864), p. 166.

(5) Heiberg in *Philologus*, T. XLIII, 1884, p. 330.

(6) Cf. *Diophanti Alexandrini Opera omnia ed. Tannery*, T. I (Lipsiae, 1893, p. 272 e 274) e T. II (Lipsiae, 1895), p. XLIII.

(7) Baillet, op. cit., p. 37.

dal seguente esempio $\frac{\iota\theta'}{\rho\pi\zeta} = \frac{187}{19}$

incontrato dall'Heiberg in un manoscritto esistente ad Oxford (1). Esso non differisce da quello adoperato da Diofanto se non per una lineetta orizzontale, che questi suol porre fra i due termini della frazione; per chiarire questo sistema citiamo gli esempî seguenti:

$$\frac{\iota\varsigma}{\rho\kappa\alpha} = \frac{121}{16} \quad \text{(Diofanto-Tannery, I, 102);}$$

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{5}{4} \text{ (ivi)} \quad ; \quad \frac{\iota\varsigma}{\delta} = \frac{4}{19} \text{ (ivi)} \quad ; \quad \frac{\alpha\,.\,\omega\iota\varsigma}{\iota\gamma\,.\,\tau\kappa\alpha} = \frac{130321}{10816} \text{ (Op. cit. I, 312).}$$

Ma Diofanto spesso indica una frazione facendo seguire al numero cardinale designante il numeratore il numero ordinale (con la particella finale ων) corrispondente al denominatore, sistema analogo al nostro di considerare una frazione qualunque come multiplo di un *quantesimo*. Ecco alcuni esempî di questo metodo:

$$\bar{\gamma}\rho\kappa\alpha^{\omega\nu} = \frac{3}{121} \text{ (Diofanto-Tannery, I, p. 120); } \overline{\rho\kappa\alpha}\ .\ \overset{\Upsilon}{M}\alpha\ .\ {}_{1}\delta\chi\mu\alpha^{\omega\nu} = \frac{121}{14641} \text{ (ivi).}$$

Una modificazione dello stesso concetto si trova in Diofanto stesso; il quale talvolta scrive il numeratore, poi le parole ἐν μορίῳ o semplicemente μορίον (abbreviato in μορ.), e quindi il denominatore: come esempio serva la frazione:

$$\overline{\tau\varsigma}\ .\ {}_{1}\bar{\vartheta}\ \mu o\rho\ .\ \overline{\lambda\gamma}\ .\ \overline{{}_{1}\alpha\psi o\varsigma} = \frac{3069000}{331776} \text{ (Diofanto-Tannery, I, 308).}$$

Del resto va rilevato che la considerazione di una frazione come multiplo di un quantesimo si trova chiaramente già in Archimede, il quale, al termine del suo opuscolo sulla *Misura del circolo*, scrisse δέκα οα'' per $\frac{10}{71}$ (2).

---

(1) *Philologus*, T. XLIII, 1884, p. 329.

(2) *Archimede ed. Heiberg*, T. I, p. 270, linea 9.

Più originali sono le due seguenti notazioni che si incontrano in Erone (1):

$$\beta' \varepsilon'' \varepsilon'' = \frac{2}{5} \quad ; \quad \gamma' \delta'' \delta'' = \frac{3}{4}.$$

Una circostanza che va notata si è che gli antichi non consideravano come obbligo del calcolatore il ridurre un numero frazionario alla sua più semplice espressione; lo provano due punti dell'*Aritmetica* di Diofanto ove come valori dei numeri cercati sono dati rispettivamente

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{4}{8} \quad \text{e} \quad \frac{\eta}{\beta} = \frac{2}{8}.$$

III. I Greci, nell'astronomia matematica, seguendo l'esempio dato dai Babilonesi, adoperarono — almeno a partire da Ipsicle (v. L. III, n. 29) — un sistema di frazioni di cui l'*Almagesto* serbò notizia e che noi chiameremo *sessagesimali* (2). L'origine di esso sta nell'abitudine di dividere anzitutto la periferia di ogni cerchio in 360 parti chiamate da Tolomeo, una volta (3) τμήματα, ma di regola μοῖραι (lat. *partes*); ogni parte veniva divisa in 60 porzioni minori chiamate ἑξηκοστά o anche λεπτά (lat. *minuta*); le nuove parti si scomponevano alla lor volta ciascuna in 60 δεύτερα ἑξηκοστά (lat. *secunda*), ognuna di queste in 60 τρίτα ἑξηκοστά (lat. *tertia*), ecc.

Per conformarsi a questo procedimento Tolomeo, divide anche il raggio del cerchio in 60 τμήματα, su ciascuna delle quali opera la suddivisione sessagesimale. Per indicare un numero rappresentato con tale sistema il celebre astronomo scrive prima il numero delle parti, poi quello dei minuti con un accento, quello dei secondi con due, ecc., come si pratica ancora oggi.

---

(1) *Erone ed. Hultsch*, p. 9, 158, ecc.

(2) Nel Medio Evo si chiamano *fractiones astronomicae* o *physicae*.

(3) *Almagesto* ed. Halma, T. I, p. 26.

Le prime quattro operazioni aritmetiche nella logistica greca.

12. Come alla descrizione di qualsisia strumento deve seguire la indicazione del modo in cui esso funziona, così al catalogo, che abbiamo testè redatto, del materiale aritmetico adoperato dai Greci deve ora seguire l'esposizione del modo in cui esso veniva adoperato. Le fonti a cui ricorrere per ottenere informazioni in proposito non sono numerose nè abbondanti. Sia che la logistica venisse considerata troppo umile materia per servire di argomento a trattati speciali; sia che i Greci abbiano nell'aritmetica seguito il costume dei sacerdoti egiziani loro maestri, avvolgendo in una nube di mistero le vie che guidano alla scoperta del modo di trattare i numeri; sia infine che il trionfo del sistema decimale abbia fatto trascurare dai posteri tutto che concerneva il funzionamento di un altro sistema che era (od almeno sembrava) di tanto inferiore: fatto sta che alla splendida fioritura di opere geometriche greche fa triste riscontro l'assenza totale di veri manuali di calcolo (1). Sicchè per formarsi un'idea del come procedevano i calcolatori greci altro non vi è che spiarli e sorprenderli nel momento in cui operano: gli è perciò che un grande valore possiedono per lo storico dell'aritmetica greca le *Opere* di Erone, l'*Almagesto* di Tolomeo ed il *Commento* a quest'ultimo redatto da Teone Alessandrino; aggiungendo l'opuscolo sulla *Misura del circolo* di Archimede, colle relative chiose di Eutocio, i resti del II Libro della *Collezione* di Pappo e le *Lettere* aritmetiche del Rabda, avremo esaurita l'enumerazione degli scritti a noi già noti a cui potremo e dovremo rivolgerci attualmente per ajuto. Ad essi vanno annessi tre altri lavori, due dei quali non ci accadde sino ad ora di nominare. Uno è un modesto quaderno scolastico, scritto da un mediocre scolaro, del secolo VI o del VII, sopra un papiro trovato nell'alto Egitto, e precisamente nella necropoli di Akhmîm (l'antica Panopoli); venne decifrato da J. Baillet ed

(1) Forse un tale manuale era rappresentato dai primi due libri della *Collezione* di Pappo; analogo era probabilmente uno scritto sulle frazioni attribuito a Diofanto (v. più avanti n. 40).

attualmente si conserva nel Museo di Gizeh (1); nella storia della matematica va sotto il nome di " papiro di Akhmîm ". Un secondo appartiene ad epoca posteriore essendo dovuto ad un matematico bizantino; è il *Manuale* di calcolo scritto da Massimo Planude (2), monaco del secolo XIV (3). Il terzo è un semplice frammento segnalato da F. Hultsch (4) e pubblicato più tardi da C. Henry (5); chi ne sia l'autore (Diofanto? Pappo? oppure un ignoto?) non sappiamo; solo possiamo dire che, se questi non scrisse altro, bene merita l'oblio in cui è caduto; se invece egli ha già un posto nella storia della matematica, la considerazione di cui gode non può essere aumentata da quel lavoro. Ciò non ostante, l'esiguità dei documenti a nostra disposizione ci impone di tenerne qualche conto.

13. Prima di raccogliere e ordinare le informazioni somministrateci da queste fonti (6), per dare un'idea generale dell'aritmetica greca, riferiamo uno scolio interessante al *Ciarmide* di Platone, scolio il quale sembra (7) estratto da opere di Gemino od Anatolio:

La logistica è la teoria che tratta delle cose numerabili e non dei numeri, giacchè essa non considera ciò che è veramente il numero, ma riguarda come unità ciò che è uno, come numero ciò che è numerabile (così 3 invece della triade, 10 invece della decade) e vi riconduce i teoremi dell'aritmetica. Essa dunque esamina da una parte quello che Archimede chiama il *problema dei buoi*, dall'altro i numeri *meliti* (μηλῖται) e *fialiti* (φιαλῖται), questi relativi alle fiale e quelli ai greggi; similmente, nelle altre

(1) V. *Le papyrus mathématique d'Akhmîm* (*Mémoires publiés par les membres de la mission archéologique française au Caire*, T. IX, 1892). Verrà citato in seguito coll'abbreviazione *Baillet*.

(2) Fu edito nell'originale dal Gerhardt (Halle, 1865). Noi ci riferiremo in seguito a *Das Rechenbuch des Maximus Planudes aus dem Griechischen übersetzt* von H. Wäschke (Halle, 1878).

(3) Egli, nel 1327, venne a Venezia come ambasciatore; nel 1352 era ancor vivo.

(4) *Pappo ed. Hultsch*, pref. al Vol. III, p. XVI.

(5) *Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanti vel Pappo attribuendum* (Halis San., 1879). Molte e sostanziali correzioni al testo vennero indicate da F. Hultsch in Zeitschr. f. Math. und. Phys., Hist.-Lit. Abth. T. XXIV, 1879, p. 199-203 e T. XXVI, 1881, p. 38-39. Secondo P. Tannery (Id. XXXIX, p. 13) l'autore di detto frammento sarebbe posteriore a Siriano maestro di Proclo (V. Sec. dell'E. v.).

(6) Il primo che si occupò di fare questo fu il Delambre; le sue conclusioni sono esposte nella nota *De l'arithmétique des Grecs* posta in fine delle *Oeuvres d'Archimède*, trad. Peyrard (Paris, 1808), a cui si può muovere il solo appunto di essere redatta soltanto servendosi di Tolomeo, Teone, Eutocio e Pappo.

(7) *Rabda-Tannery*, p. 124-125.

specie di corpi sensibili, essa considera la quantità, e si pronuncia come si trattasse di oggetti astratti. Essa ha per materia tutto ciò che è numerabile, e come costituenti i metodi detti « ellenici » ed « egiziani » per la moltiplicazione e la divisione, quali sono la sommazione e la decomposizione delle frazioni; così essa indaga i segreti dei problemi che offre il suo tema intorno a triangoli e poligoni. Essa ha per iscopo ciò che torna utile nelle relazioni della vita, quantunque sembri ragionare sugli oggetti sensibili come fossero astratti.

Qual fosse il problema di Archimede di cui quì si parla vedremo nell'ultimo Cap.; quali fossero i numeri *meliti* e *fialiti* risulta — come osserva P. Tannery (1) — da quel passo delle *Leggi* (VII, 819, *b*) ove Platone raccomanda che, seguendo l'esempio degli Egiziani, si distribuiscano ai bimbi frutti, corone e fiale, e si propongano, sugli stessi tre problemi come esercizi di calcolo. Quanto alle frazioni, risulta dal riferito scolio che i Greci consideravano siccome esotico il calcolo con frazioni fondamentali (v. n. 11) ed indigeno quello con frazioni qualsivogliano. Riguardo poi al metodo egiziano per eseguire la moltiplicazione, si deduce dal papiro Rhind (v. L. I, App. I) che consisteva nel porre il moltiplicatore sotto una delle forme

$$2^\alpha + 2^\beta + \dots \quad \text{o} \quad 2^\alpha + 2^\beta + \dots + 1 \quad , \quad \text{ove } \alpha > \beta > \dots$$

e sostituire in conseguenza l'operazione unica di moltiplicazione con una serie di duplicazioni, seguita da addizioni dei risultati (2).

In corrispondenza si ha un metodo " egiziano " per effettuare la divisione, nel quale il quoziente si ottiene sotto una delle forme sopraindicate.

Quali fossero poi i metodi " ellenici " per eseguire le quattro operazioni aritmetiche si apprende da Eutocio e Teone Alessandrino; per dichiarare quelli riferentisi alle tre prime, altro di meglio non troviamo che riferire tre esempi di addizioni, moltiplicazioni e divisioni effettuate da Eutocio; la traduzione con cui li accompagniamo serva di commento:

---

(1) Id. p. 127.

(2) Giova chiarire la cosa con un esempio. Per moltiplicare un numero N per 37 si consideri essere $37 = 32 + 4 + 1 = 2^5 + 2^2 + 1$ e si vedrà che il risultato è

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times N + 2 \times 2 \times N + N.$$

Esempio di addizione. Archimede ed. Heiberg, III, 288.

$\overset{\omega\mu\zeta}{\mathrm{M}}$. ,γϡκα	847.3921
$\overset{\xi}{\mathrm{M}}$. ,ηυ	60.8400
$\overset{ϡ\eta}{\mathrm{M}}$. ,βτκα	908.2321

Esempio di sottrazione. Id., p. 272.

$\overset{ϑ}{\mathrm{M}}$. ,γχλϛ	93636
$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$. γυϑ	23409
$\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$. σκζ	70227

Esempio di moltiplicazione. Id., p. 280.

,βτλϑδ''
ἐπί ,βτλϑδ''

$\overset{\upsilon}{\mathrm{M}}\ \overset{\xi}{\mathrm{M}}\ \overset{ϛ}{\mathrm{M}}\ \overset{\alpha}{\mathrm{M}}$,η φ'
$\overset{\xi}{\mathrm{M}}\ \overset{ϑ}{\mathrm{M}}$,ϑ ,β ψ ο ε'
$\overset{ϛ}{\mathrm{M}}$,ϑ ϡ σ ο ζ' β''
$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$,η ,β ψ σ ο π α β' δ''
φ ο ε ζ β'' β δ'' ιϛ''

ὁμοῦ $\overset{\varphi\mu\zeta}{\mathrm{M}}$,β ϟ β'' ιϛ''

$$2339\tfrac{1}{4} \times 2339\tfrac{1}{4}$$

2000	×	2000	=	4000000
2000	×	300	=	600000
2000	×	30	=	60000
2000	×	$9\frac{1}{4}$	=	18500
300	×	2000	=	600000
300	×	330	=	99000
300	×	$9\frac{1}{4}$	=	2775
30	×	2330	=	69900
30	×	$9\frac{1}{4}$	=	$277\ \frac{1}{2}$
9	×	2000	=	18000
9	×	300	=	2700
9	×	30	=	270
9	×	9	=	81
9	×	$\frac{1}{4}$	=	$2\ \frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	×	2300	=	575
$\frac{1}{4}$	×	30	=	$7\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	×	$9\frac{1}{4}$	=	$2\frac{1}{4}\ \frac{1}{16}$
somma				$5472090\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{16}$

Questa è la costante disposizione del calcolo in ogni moltiplicazione: il moltiplicatore sta sempre scritto sotto il moltiplicando preceduto dalla parola ἐπί; nella traduzione noi collegammo con una graffa quei prodotti parziali che Eutocio dispose sopra la medesima orizzontale. Una semplice ispezione degli esempî riferiti mostra l'analogia profonda tra il motodo " ellenico " ed il nostro; la maggiore discrepanza sta in ciò che, mentre noi effettuiamo le moltiplicazioni da destra verso sinistra, i Greci procedevano in senso opposto; va anche rilevata l'arbitrarietà concessa ed usata dal calcolatore nella scelta dei fattori dei singoli prodotti parziali.

Per rendere più sicuro e spedito il procedere del calcolatore, erano in uso delle tavole a semplice entrata di cui è serbata notizia nella prima delle *Lettere aritmetiche* del Rabda, ove esse sono presentate come invenzioni di Palamede (εὕρεμα Παλαμήδους); se, come sembra, questo nome rappresenta " l'antica tradizione ", sembra legittimo concludere (1) che quelle tavole fossero in uso da tempi remotissimi ed escludere presso i Greci la conoscenza e l'uso delle tavole a doppia entrata, a cui volgarmente si suole annettere il nome di Pitagora.

Come fossero disposte queste tavole ausiliari risulta dai due seguenti frammenti di esse che riferiamo come esempî, con la relativa traduzione:

Tavole per l' addizione e la sottrazione. Rabda-Tannery, p. 166.

͵θ	α̈ ͵η	͵θ	͵θ
͵θ	α̈ ͵ζ	͵η	
͵θ	α̈ ͵ϛ	͵ζ	
͵θ	α̈ ͵ε	͵ϛ	
͵θ	α̈ ͵δ	͵ε	
͵θ	α̈ ͵γ	͵δ	
͵θ	α̈ ͵β	͵γ	
͵θ	α̈ ͵α	͵α	
͵θ	α̈	͵β	

I addendo o sottraendo	Somma o minuendo	II addendo o resto	I addendo o sottraendo comune
9000	18000	9000	9000
9000	17000	8000	
9000	16000	7000	
9000	15000	6000	
9000	14000	5000	
9000	13000	4000	
9000	12000	3000	
9000	11000	2000	
9000	10000	1000	

(1) Rabda-Tannery, p. 135.

Tavole per la moltiplicazione o la divisione. Rabda-Tannery, p. 166.

θ	${}_1\alpha$	${}_1\theta$
θ	${}_1\beta$	$\ddot{\alpha}\,{}_1\eta$
θ	${}_1\gamma$	$\ddot{\beta}\,\zeta$
θ	${}_1\delta$	$\ddot{\gamma}\,{}_1\varsigma$
θ	${}_1\varepsilon$	$\ddot{\delta}\,{}_1\varepsilon$
θ	${}_1\varsigma$	$\ddot{\varepsilon}\,{}_1\delta$
θ	${}_1\zeta$	$\ddot{\varsigma}\,{}_1\gamma$
θ	${}_1\eta$	$\ddot{\zeta}\,{}_1\beta$
θ	${}_1\theta$	$\ddot{\eta}\,{}_1\alpha$
θ	$\ddot{\alpha}$	$\ddot{\theta}$

I fattore	II fattore	Prodotto
9	1000	9000
9	2000	18000
9	3000	27000
9	4000	36000
9	5000	45000
9	6000	54000
9	7000	63000
9	8000	72000
9	9000	81000
9	10000	90000

14. Il metodo seguito dai Greci per scrivere i numeri rendeva utile, fors'anco necessario, che siffatte tavole avessero una estensione assai maggiore di quella che a noi abbisogna; infatti mentre per noi l'essere ad esempio $9 \times 2000 = 18000$ segue *ad oculos* dall'essere $9 \times 2 = 18$, colui che sa che è $\theta \times \beta = \iota\eta$ non ne trae immediatamente che sia $\theta \times {}_1\beta = \ddot{\alpha}\,{}_1\eta$. Questa diversità ha suggerito alcune considerazioni utilissime, che sembrano opera di Apollonio Pergeo, e di cui si è serbata memoria grazie al frammento superstite del II Libro della *Collezione* di Pappo, considerazioni che si propongono e raggiungono il fine di facilitare il calcolo del prodotto di due numeri scritti sotto la forma seguente:

$$a = \sum_r A_r \,.\, \overline{10000}^r \quad , \quad b = \sum_s B_s \,.\, \overline{10000}^s ,$$

A_r e B_s essendo numeri interi inferiori a 10000. Per effettuare un tale prodotto basta evidentemente sapere eseguire tutti i prodotti analoghi $A_r \times B_s$, cioè di due numeri della forma $k_o + 10\, k_1 + 100\, k_2 + 1000\, k_3$, ove k_o, k_1, k_2, k_3 sono numeri compresi fra 0 e 9; e tale operazione si risolve in una successione di moltiplicazioni di numeri del tipo $k_r . 10^r$ per altri del tipo $l_s . 10^s$. Tutto ciò si presenta spon-

taneamente a chiunque adoperi il sistema decimale, ma è nascosto agli occhi di chi non conosca che la numerazione scritta dei Greci. Per metterlo in chiaro serve la considerazione delle *cifre significative* dei numeri che terminavano con degli zeri; i Greci chiamavano tali cifre πυθμένες dei numeri corrispondenti (1). Ammessa la grande antichità di alcuni documenti pubblicati da P. Tannery (2), la considerazione dei *pitmeni* risalirebbe alla scuola di Pitagora, ove essa avrebbe trovato applicazione alla costruzione degli oroscopi ed alla predizione dell'avvenire; che la considerazione di essi non sia stata abbandonata, risulta da un teorema che incontreremo in Giamblico (v. n. 37) e da un passo della prima delle *Lettere aritmetiche* del Rabda, ove è esposto (3) sotto forma particolare, ma concepito generalmente, un teorema che oggi si esprimerebbe scrivendo

$$(a_0 + 10a_1 + \ldots. + 10^m a_m)(b_0 + 10b_1 + \ldots + 10^n b_n) \leqq 10^{m+n+2},$$

ove $a_o, \ldots, b_n$ si suppongono compresi fra 0 e 9.

Dalla definizione dei *pitmeni* emerge tosto che ogni numero maggiore di 9 ha un *pitmene* determinato, ma che ognuno dei numeri $1, 2, \ldots, 9$ è *pitmene* di tre numeri compresi uno fra 10 e 99, l'altro fra 100 e 999, il terzo fra 1000 e 9999 (4); la corrispondenza fra numeri e pitmeni è espressa dalla tabella seguente:

α	è pitmene di	ι , ρ , ͵α
β	»	κ , σ , ͵β
γ	»	λ , τ , ͵γ
δ	»	μ , υ , ͵δ
ε	»	ν , φ , ͵ε
ς	»	ξ , χ , ς
ζ	»	ο , ψ , ͵ζ
η	»	π , ω , ͵η
ϑ	»	ϟ , ϡ , ͵ϑ

(1) Da un frammento di Speusippo, su cui ci intratterremo nel Cap. seg. (v. n. 28) emerge che il nome πυθμήν si attribuiva di regola al minimo dei numeri godenti una proprietà assegnata.

(2) *Notices de fragments d'onomatomancie arithmétique* in *Notices et extraits de manuscrits de la Bibl. Nationale*, T. XXXI, 2.ª Partie, 1886, p. 230-260.

(3) Rabda-Tannery, p. 160.

(4) Talora, per estensione, un numero della serie $1, 2, \ldots, 9$ veniva inoltre riguardato per *pitmene* di sè medesimo.

Quale agevolazione nei calcoli rechi la considerazione dei pitmeni fu dimostrato da Apollonio Pergeo nell' opera perduta (v. n. 9) di cui Pappo commentò ventisei proposizioni, delle quali soltanto la metà esiste tuttora (1); tutte insegnano a dedurre il prodotto di due numeri della forma $a \cdot 10^m$, $b \cdot 10^n$ mediante il prodotto ab dei loro *pitmeni*. Per illustrare l' uso dei pitmeni e, più precisamente, delle or citate proposizioni, sopra un esempio complicato, Apollonio si è proposto di calcolare il prodotto espresso dal seguente verso:

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι,

quando si interpretino le lettere come numeri; il risultato ottenuto da Apollonio e verificato da Pappo (2) è espresso dal seguente numero di 55 cifre $193 \cdot 10000^{13} + 368 \cdot 10000^{12} + 4800 \cdot 10000^{11}$.

Nella *Collezione* si trova poi calcolato (3) il numero proveniente in modo analogo dal verso:

Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου;

è un esercizio che certamente non appartiene ad Apollonio, ma deve piuttosto ritenersi come speciale fatica del commentatore, il quale trionfante chiude il suo II Libro col far sapere essere il prodotto cercato espresso da $218 \cdot 10000^9 + 4944 \cdot 10000^8 + 256 \cdot 10000^7$, numero di 39 cifre.

Tali esempî mostrano che i Greci avevano saputo famigliarizzarsi coi grandi numeri; fatto questo che è bene rilevare sin d' ora, in vista di indagini future (v. n. 62).

15. Quello che esponemmo nei due numeri precedenti è quanto di essenziale ci insegnano le opere a noi note intorno alle tre prime operazioni aritmetiche. Sulla quarta otteniamo informazioni rilevanti dal papiro di Akhmîm, ove si trovano degli interessanti particolari sulla trasformazione di un quoziente in frazioni fondamentali, operazione che è della massima importanza e di incessante applicazione nell' aritmetica basata sull' impiego di siffatte frazioni, operazione

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 4-18.

(2) Id. p. 18-24.

(3) Id. p. 24-28.

a cui, come si sa, è riserbato tanto posto nel papiro Rhind (1). Ora per eseguirla il papiro di Akhmîm suggerisce due procedimenti principali.

Il primo consiste nel sottrarre dal quoziente trasformando tante frazioni fondamentali, aventi per denominatori dei sottomultipli del denominatore di quello, sinchè finisce per rimanere una nuova frazione fondamentale; l'andamento di tale calcolo risulta chiaramente dall'esempio seguente (2):

$$\frac{239}{6460}=\frac{76+163}{6460}=\frac{76}{6460}+\frac{163}{6460}=\frac{1}{85}+\frac{68+95}{6460}=\frac{1}{85}+\frac{68}{6460}+\frac{95}{6460}=\frac{1}{85}+\frac{1}{95}+\frac{1}{68}.$$

La semplice ispezione di questa serie di trasformazioni fa vedere che per applicare questo procedimento è necessaria una non volgare abilità calcolatrice. Più sicuro, ma di applicazione più ristretta, è il metodo che si fonda sull'uso delle identità seguenti:

$$\frac{a}{bc}=\frac{1}{c\frac{b+c}{a}}+\frac{1}{b\frac{b+c}{a}}\ ,\quad \frac{a}{bc}=\frac{1}{\left(c\frac{b+mc}{a}\right)}+\frac{1}{\left(b\frac{b+mc}{a}\right):m},$$

la prima delle quali suppone che $b+c$ sia un multiplo di a e la seconda che lo sia $b+mc$ e che inoltre $\left(b\frac{b+mc}{a}\right)$ sia divisibile per m. In molti casi poi conviene applicare promiscuamente i concetti che informano i due procedimenti anzidetti. Così si ottengono, non solo le decomposizioni che s'incontrano nel lavoro decifrato dal Baillet, ma eziandio la generalità di quelle che si trovano sparse nelle *Opere* superstiti di Erone.

Il papiro di Akhmîm offre poi parecchî esempî di addizioni di quozienti espressi come somme di frazioni fondamentali, e ci fa vedere come assai sovente esse si effettuassero in sostanza ponendo sotto forma comoda la somma di tutte le frazioni fondamentali co-

---

(1) Cfr. i miei lavori: *Congetture e ricerche sull'aritmetica degli antichi Egiziani* (*Bibliotheca mathematica*, 1892, p. 97-109), *Un nuovo documento relativo alla logistica greco-egiziana* (Id. 1893, p. 79-89) e *Studî intorno alla logistica greco-egiziana* (*Giornale di Matematiche*, vol. XXXII, 1894).

(2) *Baillet*, p. 39 e 76.

stituenti quei due quozienti. Talora però il calcolatore esegue invece una serie di operazioni che noi esprimeremmo brevemente così: addizione dei dati numeri frazionarî mediante previa riduzione allo stesso denominatore, trasformazione dell'unico numero risultante in una somma di frazioni fondamentali. Ora chi non ravvisa in questo secondo modo di agire i lineamenti del calcolo *Seqem* che s'incontra nel papiro Rhind? (1)

Dagli esempî offerti dal papiro di Akhmîm si rileva ancora che concetti analoghi venivano adoperati nella sottrazione.

Quanto alla moltiplicazione di un intero a per una frazione $\frac{m}{n}$ fondamentale o non, effettuarla significa trasformare in una somma di frazioni fondamentali il quoziente $(am):n$, operazione di cui già ci occupammo. Calcoli siffatti sono eseguiti su larga scala nel papiro di Akhmîm, il quale si apre con una serie di tabelle contenenti i prodotti dei numeri

$$1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,9\,,\,10\,,\,\ldots\,,\,90\,,\,100\,,\,\ldots\,,\,900\,,\,1000\,,\,2000\,,\,\ldots\,,\,9000\,,\,10000$$

successivamente per

$$\frac{2}{3}\,,\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{5}\,,\,\frac{1}{6}\,,\,\frac{1}{7}\,,\,\frac{1}{8}\,,\,\frac{1}{9}\,,\,\frac{1}{10}\,;$$

e poi quelli dei numeri

$$1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n\,,\qquad \text{ove} \qquad n=11\,,\,12\,,\,\ldots\,,\,20,$$

pel numero

$$\frac{1}{n}\,.$$

Operazioni somiglianti, ma di proporzioni più modeste, si trovano nella prima delle *Lettere* del Rabda, ove sono espressi in numeri fondamentali i prodotti dei primi dieci numeri per le frazioni

$$\frac{3}{2}\,,\,\frac{2}{3}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{3}\,,\,\ldots\,,\,\frac{1}{10}\,.$$

(1) Cfr. Cantor, *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed.) p. 35-36.

La moltiplicazione di due frazioni fondamentali non offre alcuna difficoltà, e poca ne presenta la moltiplicazione di due somme di frazioni fondamentali, caso al quale si può sempre ridursi con un previo spezzamento, effettuato come si disse più sopra. Finalmente per la divisione, se i termini sono interi si ha di nuovo da eseguire uno spezzamento in frazioni fondamentali, e così se essi sono monomî frazionarî; ma se sono somme di frazioni, si comincia dal trasformare ciascuna in una frazione unica, se ne calcola il quoziente e questo finalmente si decompone in frazioni fondamentali (1).

16. Risulta da tutto ciò che la logistica che i Greci ricevettero in eredità dagli Egiziani, se nell'essenza coincide con la nostra, nei particolari è più complicata per l'obbligo di considerare soltanto frazioni fondamentali, il quale è incessantemente in contrasto con la convenienza di adoperare frazioni qualisivogliano (2). Poichè d'altronde i Greci con tutto facilità avevano saputo in processo di tempo (v. n. 11) escogitare un sistema di notazioni per le frazioni a numeratore qualunque (cosa invece che presenta ostacoli a chi adopera la scrittura degli Egiziani), così può recare meraviglia la persistenza delle frazioni fondamentali sino allo sfacelo della matematica greca. Per spiegarlo altro non vi è che ricorrere alla ripugnanza così comune per le novità, la quale è tanto più forte e spiccata quanto più le innovazioni toccherebbero i soggetti più umili, di uso generale, epperò più radicati nel popolo, quali sono appunto i metodi di calcolo aritmetico. Si aggiunga a ciò che gli astronomi, i quali sono gli scienziati che maggiormente hanno occasione di calcolare, si erano frattanto creati per loro uso un altro sistema, quello delle frazioni sessagesimali, il quale che non lasciava nulla a desiderare.

I particolari di tale sistema, la cui conoscenza Tolomeo presuppone nel lettore dell'*Almagesto,* sono esposti da Teone d'Ales-

---

(1) Altri particolari si troveranno in: P. Tannery, *Questions héroniennes* (Bull. des Sc. math., 2.ᵉ Série, T. VIII, 1884); Hultsch, *Die Elemente der ägyptischen Theilungsrechnung,* I (Abh. der k. Sächs. Ges. der Wiss., T. XVII, 1895).

(2) Un altro inconveniente gravissimo che presenta l'uso delle frazioni fondamentali dipende dall'essere uno stesso numero suscettibile di parecchie rappresentazioni come somma di tali frazioni; sicchè in molti casi riesce malagevole il percepire l'identità di due espressioni aritmetiche.

sandria nel suo celebre *Commento*. Ivi, dopo avere dimostrato le due proposizioni, inverse l'una dell'altra, che sono espresse dalle relazioni:

$$\frac{A}{60^a} \cdot \frac{B}{60^b} = \frac{AB}{60^{a+b}} \quad , \quad \frac{A}{60^a} : \frac{B}{60^b} = \frac{A:B}{60^{a-b}} , \quad (1)$$

Teone insegna (2) come si effettuino la moltiplicazione e la divisione di due numeri qualunque sopra due esempi che ci sembra opportuno riferire qui fedelmente tradotti, poichè da essi balzan fuori i procedimenti generali per eseguire, non solo quelle due operazioni, ma anche l'addizione e la sottrazione:

Dimostreremo, egli scrive, come dati due numeri composti ciascuno di unità di specie differenti, cioè di unità, di primi e di secondi, si trovi la quantità nascente dalla loro moltiplicazione, e reciprocamente come dato un numero composto di due o più specie di numeri, si esegua la divisione, cioè lo si decomponga ne' suoi fattori. Essendo necessario di sapere eseguire tali calcoli sui numeri che s' incontrano nella *Sintassi* (Almagesto), prendiamo come esempio il quadrato del lato del decagono, il quale sarà dimostrato essere 37.4'.55''. Io scrivo questo numero una volta sotto il medesimo; come è indicato qui appresso:

37.	4'.	55''		
37.	4'.	55''		
1369.	148.	2035		
	148.	16.	220	
		2035.	220 .	3025
1375.	4'.	14.''	10''' .	25''''

λζ .	δ'	νε''		
λζ .	δ'	νε''		
͵ατξθ .	ρμη .	͵βλε .		
	ρμη .	ις .	σκ	
		͵βλε .	σκ .	͵γκε
͵ατπε .	δ' .	ιδ'' .	ι''' .	κε'''' (3)

Moltiplicando le 37 unità per sè stesse, quindi per i primi ed i secondi; indi i 4 primi per sè stessi ed i secondi; finalmente moltiplicando i secondi per le unità che sono gradi, pei primi e per sè stessi, avremo così in modo facile il prodotto della moltiplicazione. Ora 37 unità moltiplicate per sè stesse dànno 1369; per 4 primi, 148 primi; per 55 secondi, 2035 secondi. Poi 4 primi moltiplicati per 37 unità dànno 148 primi, per sè stessi 16 secondi e per 55 secondi 220 terzi. Da ultimo 55 secondi moltiplicati per 37 unità dànno 2035 secondi, per 4 primi 220 terzi e per sè stessi

(1) *Teone ed. Halma*, T. I, p. 110-116. Alla seconda di queste formole si può collegare una osservazione (abbastanza semplice e da un anonimo scoliasta attribuita a Siriano maestro di Proclo), quella cioè che i numeri A e B, che entrano in essa, si possono dividere per uno stesso fattore. V. l'articolo di P. Tannery *Un fragment des Métriques de Héron* (Zeitschr. f. Math. und Phys., T. XXXIX, 1894, Hist.-lit. Abth., p. 13-16).

(2) *Teone ed. Halma*, Id. p. 117.

(3) Quest'ultima linea non si trova nell'originale; noi l'aggiungemmo perchè la linea omologa si trova nel calcolo del prodotto dei due numeri 103.55'.23'' e 48.31'.55'' eseguito più avanti (*Almagesto ed. Halma*, T. I, p. 254) con lo stesso sistema.

3025 quarti. Si dispongono questi numeri nel modo indicato qui sopra, ed ecco come se ne fa la somma. Si dividono prima le 3025 parti per 60 e si ottengono 50 terzi più 52 quarti. Unendo poi i terzi già esistenti a quelli provenienti dalla divisione dei quarti si ottengono 490 terzi, che dànno 8 secondi e 10 terzi. Così 4094 terzi nel totale dànno 68 primi e 14 secondi. Ed i 364 primi raccolti dànno 6 unità e 4 primi. In totale 1375 unità, 4 primi, 14 secondi, 10 terzi e 25 quarti.... Così si moltiplicano fra loro due numeri qualunque anche se sono fra loro differenti. Supponiamo ora che si debba dividere (per un altro) un numero dato in unità, primi e secondi. E sia 1515.20.'15" da dividere per 25.12.'10", si tratti cioè di trovare quante volte 25.12.'10" è contenuto in 1515.20'15." Mettiamo come quoziente 60, perchè a 61 non arriva, e togliamo (da 1515.20'.15") 60 volte 25.12'10". Anzitutto 60 volte 25 fa 1500; riducendo poi le 15 unità rimanenti in 900 primi, aggiungiamovi i 20 primi dati ed otterremo 920', da cui togliamo 60 volte 12 primi cioè 720'; e dai 200 primi rimanenti uniti ai 15 secondi togliamo 60 volte 10 secondi, cioè 600 secondi ossia 10 primi. Restano 190 primi e 15' secondi. Su questi numeri ricominciamo la divisione; il quoziente per 25 è 7, non potendo arrivare sino ad 8; togliamo dai 190 primi i 175 provenienti dalla moltiplicazione (di 25 per 7). Riducendo poi i restanti 15 primi in 900 secondi ed aggiungendovi i 15 secondi preesistenti, noi torremo 7 volte i 12 primi, cioè 84 secondi, perchè i 7 sono primi; restano 831 secondi. Togliamo similmente 7 volte i 10 secondi, cioè 70 terzi ossia un secondo e dieci terzi; restano 829 secondi e 50 terzi. Prendiamo ancora 25 per dividere questi. Il quoziente è circa 33 e dà per moltiplicazione 825. Fatta la sottrazione restano 4 secondi e 50 terzi ossia 290 terzi. Dopo di che noi torremo 33 volte i 12 primi, cioè 396 terzi. Dunque il quoziente di 1515.20'.15" per 25.12'10" è circa [*per eccesso*] 60.7.'33" (1).

---

(1) I calcoli indicati da Teone sono compendiati nel seguente schema:

```
  1515 . 20' . 15"  :  25 . 12' . 10" = 60 . 7' . 33"
— 1500
  ----------------
   15 . 20' . 15" = 920' . 15"
                  — 720'
                    ---------
                    200' . 15"
                  —  10'
                    ---------
                    190' . 15"
                  — 175'
                    ---------
                    15' . 15" = 915"
                              —  84"
                                ---------
                                831"
                              —    1" . 10'''
                                ---------
                                829" . 50'''
                              — 825"
                                ---------
                                  4" . 50''' = 290'''
                                               396'''
```

Estrazioni di radici quadratiche e cubiche.

17. La terza delle operazioni aritmetiche inverse non può eseguirsi esattamente che in casi rarissimi; poichè d'altronde innumerevoli sono le occasioni in cui si ha bisogno di conoscere almeno un valore approssimato del risultato che essa dà se applicata ad un dato numero, così il calcolo delle radici quadratiche e cubiche deve avere occupato i Greci sin dalla antichità più remota. Ed infatti si trova in Polibio (204-121 a. C. circa) la considerazione di un triangolo rettangolo avente per lati 6, 5, 3 unità, il che val quanto assumere $\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}=6$, o $\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}=3$, oppure $\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{27}=5$ (1).

Calcoli siffatti della parte intera di una radice quadratica irrazionale si possono eseguire assai facilmente da chi disponga di una tavola di quadrati; ne avevano costruite i Greci? nessun documento lo dimostra; ma la cosa è assai probabile, dal momento che già i Babilonesi ne avevano a propria disposizione (2).

Ma i Greci non si arrestarono a questa grossolana approssimazione; lo prova l'opuscolo a noi già noto (L. III, n. 20) di Aristarco di Samo, ove è implicitamente assunto $\frac{4}{5}$ come valore approssimato di $\sqrt{2}$; lo provano ancora più chiaramente i valori assai vicini al vero di moltissime radici quadrate, che s'incontrano in Archimede (cf. L. II, n. 43) ed Erone (3), coll'esattezza dei quali può competere il valore

$$1+\frac{43}{60}+\frac{55}{60^2}+\frac{23}{60^3}$$

trovato da Tolomeo per $\sqrt{3}$ (4).

---

(1) Hultsch, *Eine Näherungsrechnung der alten Poliorketiker* (Jahrb. für class. Philologie, 1897, p. 49-54).

(2) Cantor, *Vorlesungen*, T. I, (2.ª ed., 1894), p. 81.

(3) Uno studio geniale e profondo delle radici quadrate esistenti nelle opere di Erone si trova nel saggio di P. Tannery *L'arihmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (Mém. de la Soc. de Bordeaux, 2.e Série, T. IV, 1882, p. 161-194).

(4) *Almagesto ed. Halma*, T. I, p. 421. In decimali, secondo Tolomeo, è $\sqrt{3}=1,73205$, onde egli ha trovate per $\sqrt{3}$ non meno di 5 cifre decimali esatte.

Il problema di ricostruire completamente i metodi che guidarono a queste importanti conclusioni è uno dei più difficili fra quelli che offre la storia della matematica greca; le molteplici soluzioni che ne vennero date (1) non possono nè devono venire qui esposte, troppo

---

(1) A quelle citate in una nota al n. 43 del II L. va aggiunta una che si legge nella memoria del Bobynin, intitolata *Extraction des racines carrées dans la Grèce antique* (Zeitschr. f. Math. und Phys., T. XLI, 1896, Hist.-lit. Abth., p. 193-211). Nè va taciuto che G. Wertheim ha osservato di recente (v. l'articolo *Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln*, Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. XLIV, 1899, Hist.-lit. Abth., p. 1-3) che il metodo di falsa posizione (già conosciuto sin dalla più remota antichità) porge nel modo più naturale i valori approssimati di $\sqrt{3}$ dati da Archimede. Ricordiamo infatti che, data una relazione del tipo $f(x) = a$ e supposto

$$f(n_1) = a - e_1 \quad , \quad f(n_2) = a + e_2 ,$$

il metodo citato insegna dotersi prendere approssimativamente

$$\text{(I)} \qquad x = \frac{e_1 n_2 + e_2 n_1}{e_1 + e_2} ;$$

supposto invece

$$f(n_1) = a + e_1 \quad , \quad f(n_2) = a + e_2$$

si deve prendere

$$\text{(II)} \qquad x = \frac{e_2 n_1 - e_1 n_2}{e_2 - e_1} .$$

Per ciò se $f(x) = x^2$ e $a = 3$, dalla (I) si deduce successivamente:

$$\begin{array}{lllll}
\text{per } n_1 = 1 & , \; n_2 = 2 & , \; e_1 = 2 & , \; e_2 = 1 & x = \frac{}{3} \\
\text{»} \; n_1 = \frac{5}{3} & , \; n_2 = 2 & , \; e_1 = \frac{2}{9} & , \; e_2 = 1 & x = \frac{19}{11} \\
\text{»} \; n_1 = \frac{19}{11} & , \; n_2 = 2 & , \; e_1 = \frac{2}{121} & , \; e_2 = 1 & x = \frac{71}{41} \\
\text{»} \; n_1 = \frac{71}{41} & , \; n_2 = 2 & , \; e_1 = \frac{2}{1681} & , \; e_2 = 1 & x = \frac{265}{153} ;
\end{array}$$

orbene i numeri scritti nell' ultima verticale di questo quadro sono appunto i valori di $\sqrt{3}$ approssimati per difetto dati da Archimede. Servendosi invece della (II) si ottiene:

$$\begin{array}{llllll}
\text{per } n_1 = \frac{7}{4} & , \; n_2 = 2 & , \; e_1 = \frac{1}{16} & , \; e_2 = 1 & , & x = \frac{26}{15} \\
\text{»} \; n_1 = \frac{26}{15} & , \; n_2 = 2 & , \; e_1 = \frac{1}{225} & , \; e_2 = 1 & , & x = \frac{97}{56} \\
\text{»} \; n_1 = \frac{97}{56} & , \; n_2 = 2 & , \; e_1 = \frac{1}{3136} & , \; e_2 = 1 & , & x = \frac{362}{209} \\
\text{»} \; n_1 = \frac{362}{209} & , \; n_2 = 2 & , \; e_1 = \frac{1}{43681} & , \; e_2 = 1 & , & x = \frac{1351}{780} ;
\end{array}$$

e qui i valori dell' ultima colonna sono appunto le approssimazioni in eccesso di Archimede.

forte essendo l' elemento congetturale che contengono. Per converso hanno diritto di venire qui riprodotti due importanti documenti autentici sulla questione, dati, uno da Erone (1) e l' altro da Teone d' Alessandria, il primo relativo al calcolo con frazioni fondamentali, l' altro alle frazioni sessagesimali.

Nell' opera *Metrica* del primo si legge quanto segue:

Siccome il numero 720 non ha una radice razionale, noi otteniamo una radice a differenza minima come segue: Poichè 729, quadrato più vicino a 720, ha per lato 27, io divido 720 per 27, ottengo così $26\frac{2}{3}$. Vi aggiungo 27, risulta allora $53\frac{2}{3}$ la cui metà è $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$: perciò la radice più approssimata di 720 è eguale $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Infatti $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$, moltiplicato per sè stesso, dà $720\frac{1}{36}$. Se poi vogliamo che la differenza divenga ancora minore di $\frac{1}{36}$, surrogheremo il 729 col valore ora trovato $720\frac{1}{36}$; così facendo otterremo che la differenza risulti molto ancora piccola di $\frac{1}{36}$.

Da queste parole si deduce che il processo di approssimazione usato da Erone per calcolare la radice quadrata di un numero qualunque A era in generale il seguente: chiamisi a^2 il quadrato più prossimo ad A e si ponga $A = a^2 \pm b$; si avrà allora, come primo valore approssimato di $\sqrt{A}$,

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right),$$

come secondo

$$\alpha' = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{A}{\alpha}\right),$$

come terzo

$$\alpha'' = \frac{1}{2}\left(\alpha' + \frac{A}{\alpha'}\right),$$

e così via. Applicando questa regola ad $A = 63$ si ottiene il valore $7\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$, ossia $8 - \frac{1}{16}$, dato altrove da Erone stesso. Va eziandio

---

(1) P. Tannery, *Un fragment des Métriques de Héron* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. XXXIX, 1894, Hist.-lit. Abth. p. 13-16; Bull. des Sc. math., II Série, T. XVIII, 1894, p. 18-22); M. Curtze, *Quadrat-und Kubikwurzeln bei den Griechen nach Heron's neu aufgefundene* Μετρικά (Zeitschr. f. Math. und Phys., T. XLII, 1897, Hist.-lit. Abth., p. 113-120).

notato che, supposto $A = a^2 + b$, si può assumere approssimativamente

$$\alpha = a + \frac{b}{2a},$$

altra formola che si incontra nelle *Lettere* del Rabda (1); ove di più è detto che, mentre α è approssimato per eccesso,

$$\alpha_1 = \frac{A}{\alpha}$$

lo è per difetto, e che

$$\frac{\alpha + \alpha_1}{2}$$

è più approssimato di entrambi (2).

Non meno interessante è quanto dice Teone intorno al problema che ci occupa; egli pure non dimostra la regola generale ma ragiona sopra un esempio, ajutandosi con una figura; ecco come egli si esprime (3):

Supponiamo (4) ΑΒΓΔ l'area del quadrato soltanto razionale $(= 4500)$ e si tratti di calcolarne il lato approssimativamente. Siccome il quadrato a lato razionale più prossimo a 4500 è 4489, quadrato di lato 67, togliamo il quadrato AZ, o 4489, il cui lato è 67, dal quadrato ΑΒΓΔ; il gnomone ΒΖΔ varrà quanto le 11 parti rimanenti. Riducendolo in primi, avremo 660. Raddoppiamo poi $EZ = 67$, e poichè EZ è moltiplicato per due, consideriamo ZH come prolungamento di EZ, e dividiamo i 660 primi per 134. Tale divisione dà 4 primi ed abbiamo così le due rette ET, HK. Completando i parallelogrammi TZ, ZK avremo in totale 536, cioè 268 per ciascuno di essi. Riducendo poi i restanti 124 primi in 7440 secondi, torremo il parallelogramma $Z\Lambda = 16$ secondi; dimodochè aggiungendo il gnomone al primitivo quadrato, otterremo il quadrato ΑΛ costruito sul lato 67.4', di 4497.56'.16''. Finalmente il gnomone residuo ΒΛΛ è di 2.3'.44'', cioè di 7424 secondi. Raddoppiando dunque ancora ΤΛ, o dividendo questi 7424 secondi per 134.8.' verrà come quoziente approssimativamente 55'', valore delle TB e ΚΔ, Completando i parallelogrammi ΒΛ e ΛΔ li avremo complessivamente di 7377 secondi e 20 terzi e ciascuno di 3688 secondi e 40 terzi; restano ancora 46''.40''' che fanno circa il quadrato ΔΓ il cui lato è 55''. Dunque il lato del quadrato $AB\Gamma\Delta = 4500$, è circa 67.4'.55'' (5).

---

(1) Rhabda-Tannery, p. 156.

(2) Id., p. 184.

(3) *Teone ed. Halma,* T. I, p. 184-186.

(4) Lasciamo al lettore di tracciare la figura.

(5) In cifre decimali il valore di questo lato è 67,08194... mentre dovebbe essere 67,08203...

Il procedimento descritto in questo brano, e che Teone enuncia in termini generali, evidentemente non differisce nella sostanza da quello che noi adoperiamo; esso traducesi infatti nella regola seguente: " per estrarre la radice quadratica di un numero dato N si cerchi il lato del massimo quadrato contenuto nel primo termine di N si faccia la differenza fra questo e quel quadrato; si divida il resto, trasformato in secondi, pel doppio della radice trovata; il quoziente aggiunto al lato del quadrato massimo venga elevato a quadrato; ciò che risulta si tolga dal numero dato, e così si continui ". È la stessa regola che si incontra, con alterazioni senz' importanza, nel *Manuale* di Massimo Planude (1).

18. Chiuderemo questa esposizione della logistica greca con un cenno intorno alla più difficile operazione aritmetica conosciuta dagli antichi, cioè l' estrazione delle radici cubiche. Già trovammo (v. L. IV, n. 8) nella *Collezione matematica* un procedimento per effettuare la " moltiplicazione del cubo ", senza però addurre alcuna prova che Pappo avesse ravvisato in esso un vero metodo di approssimazione. È pertanto di inestimabile valore un brano dei Μετρικά ove Erone calcola $\sqrt[3]{100}$; saremo perciò pienamente giustificati di presentare qui dinnanzi agli occhi del lettore questa gemma recentemente dissepolta (2):

Come poi si possa trovare la radice cubica di 100 unità, vogliamo dire ora. Prendi i due cubi più prossimi a 100 (3), il maggiore ed il minore; sono 125 e 64; e determina di quanto il primo è maggiore (di 100), cioè 25, e di quanto il secondo è minore, cioè 36. Moltiplica allora 36 per 5; risulta 180. Aggiungendo 100, si ottiene 280; [dividendo 180 per 280 viene $\frac{9}{14}$]. Aggiungi questo alla radice del cubo minore, cioè a 4, e risulterà $4\frac{9}{14}$. Questa è la radice cubica di 100 con la massima esattezza possibile (4).

(1) P. 46-54 della citata traduzione tedesca.

(2) M. Curtze, *Quadrat-und Kubikwurzeln bei den Griechen nach Heron's neu aufgefundenen* Μετρικά (Zeitsch. f. Math. u. Phys., T. XLII, 1897, Hist.-lit. Abth., p. 113-120).

(3) Questa frase fa supporre che Erone disponesse di una tavola di cubi.

(4) Infatti è circa

$$\left(4\frac{9}{14}\right)^3 = 100\frac{1}{12}$$

Secondo una congettura, mediocremente attendibile, formulata dal primo editore di questo passo, la regola generale che Erone applica sarebbe la seguente: sieno p^3 e q^3 i due cubi consecutivi fra cui è compreso il numero A di cui si cerca la radice cubica; posto

$$A = p^3 - a = q^3 + b,$$

si avrà approssimativamente

$$\sqrt[3]{A} = q + \frac{b\sqrt{a}}{A + b\sqrt{a}}.$$

Più verosimile di questa è una divinazione del procedimento eroniano immaginata, indipendentemente l'uno dall'altro, da G. Wertheim e A. Kerber (1), la quale consiste in una speciale applicazione del metodo di falsa posizione (cfr. n. 17, nota). Per dichiararla, osserviamo che, supposti a^3 e $(a+1)^3$ i due cubi consecutivi fra cui è compreso A, si ha (detto x il cercato valore di $\sqrt[3]{A}$)

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + xa + a^2),$$

onde approssimativamente

$$A - a^3 = (x-a) \,.\, 3xa;$$

ossia, indicando con e_1 l'errore $A - a^3$,

$$e_1 = (x-a) \,.\, 3ax.$$

Detto similmente e_2 l'errore $(a+1)^3 - A$, si trova con analogo ragionamento per approssimazione

$$e_2 = (a+1-x) \,.\, 3(a+1)x;$$

onde sarà, entro gli stessi limiti,

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{(x-a)a}{(a+1-x)(a+1)};$$

se ne trae

$$x = \sqrt[3]{A} = \frac{(a+1)^2 e_1 + a^2 e_2}{(a+1)e_1 + ae_2}.$$

Secondo la regola espressa da tale forma Erone avrebbe operato.

(1) V. l'articolo anteriormente citato del primo *Herons Ausziehung* etc.

Ed infatti, per $A = 100$, $a = 4$, $e_1 = 36$, $e_2 = 25$ si ottiene $x = 4 + \frac{9}{14}$, applicandola ad altri esempi si ottengono valori altrettanto approssimati al vero; sgraziatamente però nessuno di tali nuovi esempî è fornito da Erone stesso!

Con questa notizia sulla più elevata delle operazioni aritmetiche eseguite dai Greci, abbandoniamo la logistica per volgerci all'enumerazione delle proprietà che essi avvertirono nei numeri. Più brusco trapasso non ci potrebbe essere; chè, mentre il tema da cui ci stacchiamo si riferisce alla più umile fra le diramazioni della Matematica, quello che stiamo per affrontare tocca (almeno secondo i concetti di coloro che per primi che se ne occuparono) il soggetto più elevato che mente di scienziato possa concepire, cioè la determinazione delle leggi numeriche da cui sono governati tutti i fenomeni fisici, la scoperta delle relazioni che intercedono fra numeri e cose.

II.

L'aritmetica nella Scuola di Pitagora.

Sguardo generale sopra l'aritmetica pitagorica.

19. Il lettore che ricorda quanto dicemmo intorno a Talete (L. I, n. 5) sarà inclinato a supporre che questi abbia posto la prima pietra dell'aritmetica greca, come in Grecia diede il primo impulso allo studio della geometria; ma tale ipotesi non è conforme a quanto vien riferito, giacchè l'unico pensiero aritmetico attribuito al saggio di Mileto è la considerazione del numero come collezione di monadi (1), che Giamblico gli attribuisce, ma che egli non fece che trasportare dall'Egitto in patria (2).

---

(1) P. Tannery, *Pour l'hist. de la Science hellène* (Paris, 1887, p. 62).

(2) Id. p. 369-391, nonchè l'articolo del Tannery *Sur l'arithmétique pythagoricienne* (Bull. des Sc. math., II Série, T. IX, 1885, p. 69-89). La persistenza nella letteratura matematica di quella considerazione è provata dalla presenza di essa in Boezio; « numerus est unitatum collectio » egli scrive infatti (v. *Boetii de institutione arithmetica* etc. ed. Friedlein, Lipsiae, 1867, p. 13).

Colui invece che sta alla testa degli aritmetici Greci è Pitagora, di cui già conosciamo le elucubrazioni intorno all'applicazione della scienza dei numeri all'interpretazione dei fenomeni naturali (L. I, n. 13 e 14). Sgraziatamente i risultati positivi di tali indagini andarono o perduti o frammischiati a quelli dovuti ai Neo-Pitagorici ed ai Neo-Platonici, sicchè nulla è più malagevole del redigerne un catalogo completo e non esuberante; la principale ragione di tale dispersione o miscela probabilmente sta nel non esistere più (e forse non venne mai scritta!) una esposizione metodica dell'aritmetica Pitagorica e nell'essere perite, non soltanto le opere di Archita *Sulla decade* e di Filolao *Sulla natura* (1), ma anche quella di Aristotele intitolata *Il Pitagorico,* la quale per fermo conteneva la quintessenza dei pensieri, aritmetici e non, del celebre filosofo di Samo. In tale mancanza di documenti coevi, non v'ha che ricorrere a quelli meno lontani da Pitagora e cercarvi quanto è a costui esplicitamente attribuito.

Troviamo così che a lui si fa merito di avere stabilita nettamente la distinzione fra l'aritmetica (scienza astratta) e la logistica (arte del calcolo) (2), sulla quale distinzione probabilmente venne modellata la distinzione fra γεωδαισία e γεωμετρία che si trova in Aristotele; Aristosseno aggiunge essere stato Pitagora colui che elevò l'aritmetica al disopra dei bisogni dei mercanti, il che non viene contraddetto da alcuno frai più antichi documenti recentemente dissepolti.

Inoltre un passo di Giamblico, ove il nostro filosofo è presentato nell'atto di iniziare un giovane ai misteri aritmetici mediante figure tracciate sopra un ἄβαξ, rende verosimile la supposizione che Pitagora abbia conosciuto (probabilmente per merito degli Egiziani) e diffuso fra i suoi discepoli l'uso di una tavola ricoperta di polvere, per eseguire i calcoli (3).

20. Scendendo ora a particolari più minuti, ricorderemo le ampie nozioni che i Pitagorici possedevano sulle proporzioni (L. I, n. 21) probabilmente limitate a numeri interi, e la scoperta da essi fatta delle

(1) Citate da Teone Smirneo (ed. Dupuis, p. 174).

(2) Cfr. la classificazione delle discipline matematiche riferita nel n. 19 del I L. come opera di Pitagora.

(3) Cfr. a questo proposito la recente memoria di A. Nagl *Die Rechenmethoden auf dem griechischen Abakus* (Abh. zur Gesch. der Mathem., IX, Heft, 1899, p. 335-357).

quantità irrazionali (Id. n. 27). Notevoli poi, ancor più della sottile distinzione da essi avvertita fra l'*uno* (essere isolato indivisibile) e la *monade* (essere generatore del numero), sono gli sforzi (1) che essi fecero per scoprire in ogni numero della prima decade delle qualità specifiche ammirande (2). Così nell' 1 notarono la proprietà di essere indivisibile ed anche immutabile perchè $1 \times 1 = 1$; nel 3, numero per essi sacro, ravvisarono il primo ente aritmetico dotato di principio, mezzo e fine; ciò indusse a considerare nota nella scuola di Crotone la distinzione dei numeri in *pari* e *dispari,* il che è confermato tanto da un' opinione di Archita riferita da Teone Smirneo (3), quanto dal trovarsi nell' elenco delle categorie d' Aristotele una composta di " pari e dispari „ e da una definizione di tali numeri che Boezio attribuisce ai Pitagorici (4). Così questi notarono essere il 6 eguale alla somma delle proprie parti (1, 2, 3), donde forse furono guidati al concetto di *numero perfetto* (τέλειος); e nel 7 essi rilevarono la proprietà di non essere divisore o multiplo di alcun numero della decade; e questo fa credere conosciuta ai Pitagorici la distinzione dei numeri in *primi* e *composti.* A questa si connette la considerazione dei *numeri amici* (φίλοι ἀριθμοί), di cui, al dire di Giamblico, sembra Pitagora conoscesse almeno la coppia 220 e 284 (5). Nel numero 4, primo quadrato pari, non riuscirono, malgrado i loro sforzi, a scoprire delle proprietà aritmetiche rilevanti, ma per compenso ne trovarono tante rappresentazioni (6) che, nel loro entusiasmo per colui che primo le aveva rivelate, composero il celebre giuramento: " giuro per colui che trasfuse nelle nostre anime il quaternario, sorgente

(1) Cfr. gli analoghi tentativi per connettere tali numeri a figure geometriche, ricordati nel n. 20 del L. I.

(2) *Teone Smirneo ed. Dupuis*, p. 132 e seg.

(3) Ivi, p. 34.

(4) *Boezio ed. Friedlein*, p. 13.

(5) Dopo di avere detto che « certi numeri vennero detti amici da coloro che assimilarono i numeri e le virtù alle abitudini più eleganti », Giamblico aggiunge che « 284 e 220 sono numeri di tale specie, perchè le parti di ciascuno generano l'altro, come venne dimostrato da Pitagora. Infatti, avendo un tale domandato *che cosa è un amico,* egli rispose *un altro io* (ἕτερος ἐγώ), dimostrando accadere ciò appunto per quei due numeri ». È noto che la scoperta di una regola per trovare delle coppie di numeri amici appartiene, non ai Greci, ma agli Arabi (v. Cantor, *Vorlesungen*, T. I, 2.ª ed., p. 692).

(6) Lo Smirneo ne enumera non meno di undici (v. ed. cit., p. 154-162).

della natura eterna! „. Il 5 è media aritmetica di ciascuna delle coppie

1 , 9 ; 2 , 8 ; 3 , 7 ; 4 , 6 ;

il che Teone Smirneo (1) rappresentò collo schema seguente:

α	δ	ζ
β	ε	η
γ	ς	θ

1	4	7
2	5	8
3	6	9

;

è questo il primo cenno a noi noto di quadrati magici almeno parzialmente.

Emerge dal fin qui detto che, per quanto i tentativi dei Pitagorici fossero extra-scientifici e fors' anche anti-scientifici, pure essi non furono assolutamente sterili dal momento che condussero a qualche nozione fondamentale ed a qualche verità non ispregevole (2). Tale giudizio riceve forse qualche conferma da un passo scritto da S. Ippolito (3) (prima metà del III Sec.), nel quale è esposto un metodo per prevedere gli avvenimenti futuri, intimamente connesso alle considerazioni da noi esposte nel n. 15 del presente Libro, e che viene designato sotto il nome di *calcolo pitagorico,* nome giustificato da altri documenti di più antica data (4). Riferiamo qui i passi più interessanti di questo brano, per poi dedurne qualche conseguenza relativa all'aritmetica pitagorica:

Coloro che pretendono predire mediante calcoli sopra numeri, lettere, e nomi, hanno come punto di partenza della loro teoria ciò che chiamano il ***pitmene*** di ogni

---

(1) Ed. Dupuis, pag. 166.

(2) Fra queste merita indubbiamente un posto distinto la proposizione (*Elementi,* II, 10) espressa dall' identità $(a+b)^2 + b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}+b\right)^2$ che recenti documenti fanno risalire alla Scuola di Pitagora (v. F. Hultsch, *Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen,* Bibl. math. 3.ª Série, Vol. I, 1900, p. 3-12).

(3) Veggasi il IV Libro dell' opera: *Refutationis omnium haeresiorum librorum decem quae supersunt* (ed. Duncker, Gottinga, 1859).

(4) Pubblicati dal Tannery (*Notice sur des fragments d' onomatomancie arithmétique,* in *Notices et Extraits des manuscrits* etc. T. XXXI, 2.ᵉ Partie, 1886, p. 231-260).

numero. Per le migliaja è eguale a tante unità quante migliaja: così per sei mila il ***pitmene*** è 6 unità; per settemila 7 unità; per ottomila 8 unità, e così per gli altri. Per le centinaja, il loro ***pitmene*** è tante unità quante centinaja; così per settecento, essendovi 7 centinaja, il ***pitmene*** è 7; per seicento, essendovi 6 centinaja, il ***pitmene*** è 6 unità. Similmente per le decine: per ottanta 8 unità, per sessanta 6 unità, per quaranta 4 unità, per dieci 1 unità. Per le unità il ***pitmene*** è il numero stesso delle unità: così per nove è 9, per otto 8, per sette 7.

Ora per le lettere bisogna fare lo stesso; perchè ogni lettera rappresenta un numero determinato; così ν vale cinquanta unità, il ***pitmene*** di cinquanta unità è 5, onde il ***pitmene*** di ν sarà pure 5.

Debbasi ora prendere il ***pitmene*** di un nome, per esempio Ἀγαμέμνων. Si prende per α, 1; per γ, 3; pel secondo α, 1; per μ, 4, per ε, 5; per μ, 4; per ν, 5; per ω, 8; per ν, 5. Facendo la somma

$$1+3+1+4+5+4+5+8+5=36$$

Si prendono ancora i ***pitmeni*** di queste unità λϛ; quello di λ è 3, e quello di ϛ, 6; la somma è $3+6=9$, il cui ***pitmene*** è 9. Il nome Ἀγαμέμνων ha dunque per ***pitmene*** 9.

Applicato lo stesso procedimento al nome Ἕκτωρ, S. Ippolito prosegue:

È più facile di procedere come segue: dopo di avere trovata la somma dei ***pitmeni*** delle lettere, per esempio 19 per Ἕκτωρ, lo si dividerà per 9; il resto sarà il ***pitmene***. Quindi io divido 19 per 9, resta 1, poichè 9 volte due fa 18, che tolto dà 19 da 1; perciò il ***pitmene*** di Ἕκτωρ è 1.

S. Ippolito applica ancora questo metodo al nome Πάτροκλος, e poi aggiunge:

Se si calcola secondo la « regola del novenario », si dividerà per 9 la somma dei ***pitmeni***, ed il resto sarà il ***pitmene;*** altri seguendo la « regola del settenario » dividono per 7. Così pel nome Πάτροκλος si trovò 34 come somma dei ***pitmeni;*** dividendo per 7 resta 4, essendo 4 volte 7 eguale a 28, resta 6... Bisogna osservare che se dividendo si ottiene un quoziente intero... il ***pitmene*** è il numero 9 stesso.... Quando calcolando sui nomi si trova due volte la stessa lettera, non se ne tien conto che una volta....

L'importanza pel matematico di queste notizie è considerevole per varie ragioni. In primo luogo, ammesso come realmente pitagorico il calcolo indicato, la nozione di *pitmene* — (nel senso attribuito a questa parola da Pappo (n. 14) — dovrebbe farsi risalire ad un'epoca molto anteriore ad Apollonio di Perga. In secondo luogo (1), il procedimento per calcolare il *pitmene* di una parola è identico al calcolo

(1) Oltre il lavoro ultimamente citato, si vegga: P. Tannery, *Sur l'invention de la preuve par neuf* (Bull. des Sc. math., 2.e Série, T. VI, p. 142-144).

per addizione, sopra un numero scritto nel sistema numerale dei Greci, del resto della divisione di questo numero per 9, cioè all'operazione preliminare di qualsiasi “ prova per 9 „, di quell'operazione cioè che si trova applicata da Massimo Planude nel suo *Manuale* ed ivi presentata come un ritrovato Indiano, trasmessoci dagli Arabi. — Quelle notizie (confermate da Giamblico nella sua *Vita di Pitagora*) però sono in flagrante contraddizione (non soltanto con alcuni fatti di cui parleremo nei n.[i] 22 e 23, ma anche) con l'epoca che vedemmo (n. 7) attribuirsi al sistema di indicare i numeri con lettere, giacchè il “ metodo pitagorico „ per divinare il futuro ha come sua base tale sistema, nè riesce chiaro su quale altra erigerlo. Come conciliare tutte queste cose ci sembra difficile, specie perchè tutte le fonti che si potrebbero invocare sono così torbide che mal potrebbero dissetare l'indagatore avido di verità. Comunque, ridotto al minimo il valore dei documenti che abbiamo citati, essi costituiscono una prova assai seria per attribuire ai Greci la conoscenza della “ prova per nove „ (1), le cui radici si erano cercate indarno nella letteratura indiana, spinti dall'esservene ivi molteplici applicazioni; se poi è a Pitagora che essi ne sono debitori è questione tuttora aperta e che possiede grande valore per la sua connessione con quella delle origini dell'ultimo sistema di numerazione scritto usato dagli Ellèni (v. n. 7).

21. Ai discepoli di Pitagora sembra doversi far risalire anche la rappresentazione dei numeri sopra opportune figure; anzi gli è così probabilmente che essi giunsero, col mezzo delle figure seguenti, a trovare le relazioni fra i numeri dispari ed i quadrati, fra i numeri della serie naturale ed i triangolari:

---

(1) Il Tannery si esprime a questo riguardo così. « Que Pythagore ait connu la pratique des calculs de la preuve par neuf appliquée au système de numération alphabétique des Grecs, on ne serait en droit de le supposer que si l'on avait d'abord démontré que de son temps ce système de numération était déjà en vigueur, ce qui, dans l'état actuel de la science, paraît au moins douteux. Mais rien n'empêche d'admettre qu'il connaissait le principe de ces calculs et savait l'appliquer sur l'abaque à jetons ». (*Notices sur des fragments* etc., p. 244).

siffatte relazioni sono algebricamente espresse dalle formole:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \quad , \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} ,$$

la prima delle quali dà la ragione per cui i numeri dispari erano chiamati, a partire da Filolao, numeri *gnomonici* (1).

Ancora più esplicita è l'attribuzione a Pitagora di un metodo (il primo conosciuto) per costruire dei triangoli rettangoli a lati razionali; preso come primo cateto un numero dispari a, Pitagora prescriveva, al dire di Proclo (2), di prendere come secondo cateto $\frac{a^2 - 1}{2}$ e quindi per ipotenusa $\frac{a^2 + 1}{2}$; applicando tale regola si ottiene una serie illimitata di triangoli, i cui lati sono:

(3 , 4 , 5) , (5 , 12 , 13) , (7 , 24 , 25) , (9 , 40 , 41), ecc.

Come il grande filosofo sia giunto a concepire il problema così risoluto è facile immaginare. Riconosciuta, od appresa dagli Egiziani, l'esistenza di un triangolo rettangolo di lati 3, 4, 5, in altri termini, visto che l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti 3 e 4 è un numero razionale (ῥητὸς ἀριθμός); riconosciuto d'altronde che in moltissimi casi (ad esempio per un triangolo rettangolo isoscele) presi per cateti due numeri razionali si giungeva ad un ἄρρητον per l'ipotenusa e ad un ἄλογον per ciascuno dei rapporti fra l'ipotenusa ed un cateto, da un lato i Pitagorici arrivarono a concepire le quantità irrazionali, dall'altro a chiedersi se, oltre al triangolo classico di lati 3, 4, 5, esistessero altri triangoli rettangoli aventi tutti i lati razionali. Si vede pertanto che il problema di cui indicammo la soluzione si adatta perfettamente al quadro delle investigazioni che condussero alla scoperta del teorema di Pitagora e delle quantità irrazionali (3). Del come forse siasi giunti alla so-

(1) Riguardo al vocabolo *gnomone* v. L. I, n. 24. A ragione F. Hultsch (v. Götting. Nachrichten, 1893, p. 371) osserva che, siccome Filolao usa la parola γνώμων come termine tecnico consacrato dall'uso, così è probabile che il corrispondente concetto appartenga a Pitagora.

(2) Proclo-Taylor, T. II, p. 205. Boezio (ed. Friedlein, p. 408) lo attribuisce ad Archita.

(3) Che sia stata invece la ricerca dei triangoli rettangoli in numeri quella che guidò al teorema di Pitagora, è un'opinione di V. Flauti che ci sembra poco accettabile (v. *Analisi algebrica elementare*, III ed., Napoli 1830, p. XII).

luzione di esso problema ci occuperemo tra poco (n. 26), studiando una seconda soluzione dello stesso.

Rileviamo da ultimo che ai Pitagorici Plutarco attribuisce l'osservazione che i numeri 16 e 18 possiedono ciascuno la proprietà di misurare l'area ed il perimetro dello stesso rettangolo (1). Se notarono anche essere dessi gli unici numeri in possesso di tale proprietà, non sappiamo; tuttavia è tanto semplice ed elementare il ragionamento che conduce a tale conclusione che nulla vieta ammetterlo per immaginato nella scuola di Crotone. Ed invero la ricerca di due numeri interi positivi x, y aventi la proprietà suddetta equivale alla risoluzione dell'equazione indeterminata $xy = 2(x + y)$, ossia dalla seguente $(x - 2)(y - 2) = 4$, cioè alla determinazione di due numeri tali che il prodotto del primo diminuito di 2 pel secondo pure diminuito di 2 sia 4; perciò $x - 2$ e $y - 2$ saranno eguali uno a un fattore di 4 e l'altro al fattore complementare, epperò o entrambi eguale a 2, oppure uno eguale a 1 e l'altro a 4; per conseguenza non esistono che le due soluzioni $x = 4, y = 4$ e $x = 3$, $y = 6$, che danno pel prodotto xy i valori 16 e 18 segnalati da Pitagora.

La pretesa origine pitagorica del sistema decimale.

22. Con ciò abbiamo esaurita l'enumerazione delle più attendibili notizie intorno al sapere aritmetico de' Pitagorici.

Ma prima di volgerci ad esaminare quale sviluppo od eventuale trasformazione abbia subito la scienza dei numeri passando dalla scuola di Pitagora a quella di Platone, è dovere nostro l'arrestarci a spiegare come e perchè il nome del sommo filosofo di Samo si trovi implicato nella grande questione dell'introduzione in Europa delle cifre di cui oggi ci serviamo.

Ricordiamo all'uopo che, in forza dell'imponente autorità del Wallis (2), ebbe per assai tempo valore di verità indiscutibile l'opinione che le cifre ordinariamente dette *arabe* (quantunque gli Arabi non si vantassero mai di esserne gli inventori) siano state imma-

(1) Cfr. due lettere scritte da R. F. de Sluse a Huygens il 4 ottobre 1657 ed il 25 ottobre 1658 ed inserite nel T. II (La Haye, 1889) delle *Oeuvres complètes de C. Huygens.*

(2) Cfr. *De Algebra tractatus* in *Opera mathematica*, vol. II (1693) p. 7 e seg.

ginate dagli Indiani (1), da cui i seguaci di Maometto le avrebbero apprese, per quindi insegnarle ai popoli europei: in particolare la Spagna sarebbe stato il paese che primo usufruì dell' importante ritrovato, ed a Siviglia e Cordova lo avrebbe imparato Gerberto (morto nel 1003 come Papa Silvestro II); il quale l' avrebbe in seguito diffuso fra tutti i Cristiani del resto d' Europa. Ora tale ricostruzione storica è contraddetta da un passo della *Geometria* di Manlio Severino Boezio (morto nel 524 dell' E. v.) (2), segnalato verso la metà del secolo XVII dal celebre erudito Isacco Vossio (3). In tale brano l' autore, dopo di avere insegnati parecchi termini tecnici che poco ci interessano (fra cui si trovano *digiti* ed *articuli*), e di avere esposte alcune considerazioni filosofiche, che ci interessano ancora meno, prosegue testualmente così (4):

Degli uomini di somma perspicacia, appartenenti alla scuola pitagorica, si occuparono, in qualità di investigatori della sapienza platonica, di speculazioni notevoli, ponendo al vertice di tutta la filosofia le proprietà dei numeri. Ed infatti, chi mai potrà intendere la misura dell' accordo musicale se non lo crede dipendente dai numeri? Chi potrà, ignorando la natura dei numeri, riconoscere le costellazioni formate dalle stelle del firmamento e concepire il sorgere ed il tramontare dei segni dello zodiaco? Da ultimo. che deggio dire dell' aritmetica e della geometria, le quali non si presentano che sotto forma irriconoscibile, quando siano perdute le proprietà dei numeri? Ma di questo si è già parlato abbastanza nell' *Aritmetica* e nella *Musica;* ritorniamo pertanto a quello di cui dobbiamo occuparci ora. I Pitagorici, che si manifestarono sempre pieni di genio inventivo sottile, per evitare di commettere errori nelle moltiplicazioni, divisioni e misure, si servirono di una figura tracciata in modo particolare, la quale, in onore del loro maestro, chiamavano tavola pitagorica (*mensa pythagorea*) perchè, riguardo alle cose ivi rappresentate, le prime discipline erano dovute a quel maestro. Chi venne dopo chiamò tale figura *Abaco*. Essi pensavano che quanto era frutto di una meditazione profonda sarebbe stato più facilmente conosciuto da tutti, ove fosse stato presentato dinnanzi agli occhi in un certo modo; in conseguenza diedero a quella figura il seguente aspetto.

Dopo di che, nella *Geometria* di Boezio si trova una tabella, che per molto tempo venne scambiata per una tavola di moltipli-

(1) V. anche una esplicita dichiarazione in questo senso fatta da Massimo Planude nell' esordio del suo *Manuale di calcolo*.

(2) Osserviamo qui che Boezio cita come sua principale fonte di informazione un certo Archita, che per molto tempo fu distinto dal celebre Tarantino (v. L. I, n. 50-53) epperò chiamato Archita *Latino*. Ma una osservazione dell' Allman (*Greek geometry from Thales to Euclid*. Dublin 1889, p. 110) induce a identificare i due personaggi.

(3) *Pomponii Melae libri tres de situ orbis, cum observationibus* I. Vossii, (Hagae 1658 II ed., p. 85).

(4) Boezio ed. Friedlein, p. 395.

cazione a doppia entrata, donde la ragione del nome di " tavola pitagorica „ od " abaco pitagorico „ (1) dato impropriamente alle tavole di moltiplicazione in uso nelle scuole (2). In quelle tabelle i numeri sono indicati con segni speciali (gli *apici* di Boezio), di forma assai simile ai nostri 1, 2, ... 9, ed accompagnati da nomi, abbastanza eterocliti, nei quali è percepibile qualche ingrediente orientale; Boezio aggiunge una spiegazione dei varî valori che hanno i detti segni a norma della differente posizione che occupano sulla tabella a colonne, e da ultimo mostra come, col loro mezzo, si effettuino la moltiplicazione e la divisione.

Ognuno vede la straordinaria importanza delle dichiarazioni di Boezio, sicchè nessuna meraviglia che molti studî siano stati fatti per determinarne l'attendibilità e possibilmente trovarne delle conferme; ci conceda il lettore che, per non scostarci troppo dal nostro tema, sorvoliamo sui lavori che vennero pubblicati prima del 1837 (3), chè la loro influenza appare ben piccola se paragonata con quella esercitata da Chasles (4): il quale — appoggiandosi sopra un manoscritto dell' XI secolo esistente nella Biblioteca di Chartres — interpretò completamente le parole di Boezio e congegnò una spiegazione del fatto che fino a Gerberto sia rimasta lettera morta l'invenzione di un sistema di numerazione, il quale di tanto eccelleva su quello in uso presso i Greci.

Le opinioni dello Chasles trovarono tosto un oppositore assai gagliardo nel Libri; il quale nel II volume della *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (5) espose delle idee molto differenti intorno alla genesi del nostro sistema di numerazione. Un'attitudine in certo modo intermedia fra lo Chasles ed il Libri venne

(1) Montucla, *Hist. des Mathém.*, T. II (2.e ed., an. VII) p. 13.

(2) Questo errore venne rilevato dal Mannert nella dissertazione *De numerorum, quos Arabicos vocant, vera origine pythagorica* (Norimb., 1801), e poi da Chasles (*Aperçu historique*, II ed., 1875, p. 468). Ciò non ostante esso perdurò ancora; v. infatti T. Taylor, *Theoretic Arithmetic* (London 1816) p. 41; F. von Drieberg, *Die Arithmetik der Griechen* (Leipzig, 1819), p. 77, ecc.

(3) I più cospicui sono segnalati nelle *Recherches concernant les origines de notre système de numération* (*Revue archéologique*, T. XIII, 1857) di T. H. Martin.

(4) Oltre alla Nota XII dell'*Aperçu historique*, si veggano gli articoli inseriti nei *Comptes-rendus* delle sedute che tenne l'Istituto di Francia nei giorni 21 gennaio, 7 e 14 ottobre 1839; 23 e 30 gennaio, 6 febbraio, 26 giugno e 24 luglio 1843.

(5) Paris, 1838, p. 290 e seg. Cfr. anche *Comptes-rendus*, 14 ottobre 1839.

assunta dal Vincent (1), il quale, dopo di avere paragonato il succitato codice di Chartres col Ms. n. 343 del British Museum, confermò in parte le conclusioni del celebre divinatore dei porismi; però sostenne che i Pitagorici, di cui è parola nella Geometria di Boezio, non sono immediati discepoli del filosofo di Samo, ma tardi aderenti alle idee insegnate nella Scuola di Crotone, i quali erano imbevuti dei concetti professati dai cabalisti giudeo-alessandrini. Una riprova di tale opinione venne dal Vincent trovata nei nomi stessi con cui Boezio indica i numeri 1, 2, ... 9, nomi nei quali egli trovò una miscela di radici greche e di radici semitiche relative a parole collegate al misticismo neo-pitagorico. Così il significato del passo di Boezio veniva a subire una modificazione profonda — di cui non tennero conto nè il Nesselmann (2), nelle sue considerazioni intorno alle indagini dello Chasles, nè Alessandro Humboldt, nel fare completa adesione alle conclusioni di quest'ultimo (3) — modificazione che cambiava una questione relativa all'alba dell'aritmetica greca, in altra relativa al declivio di essa; una questione concernente un elemento greco vetustissimo esistente forse nella nostra logistica, in altra concernente l'epoca in cui il genio matematico greco stanco, spossato ed esausto mendicava ajuto ed alimento presso popoli di altra stirpe.

Gli argomenti con cui il Vincent sostenne la propria tesi meritarono l'approvazione di M. Cantor (4) e di Th. H. Martin (5), i quali tuttavia vi arrecarono alcune modificazioni; non importa qui indicarle, giacchè non si riferiscono alla parte di quella tesi che a noi interessa, cioè all'essere stati gli *apici* di Boezio appresi dai Neo-Platonici fuori di Europa e poi da essi insegnati ai loro conterranei.

Nel frattempo la questione, di cui andiamo delineando le fasi, subiva una alterazione ancora più profonda e decisiva.

---

(1) *Note sur l'origine de nos chiffres et sur l'Abacus des Pythagoriciens* (Journ. de Mathématiques, T. IV, 1839, p. 261-280).

(2) *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842) p. 100-104.

(3) *Kosmos*, T. II (Stuttgart und Augsburg, 1847) p. 263.

(4) *Mathem. Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle, 1863) p. 199-262; a base delle considerazioni ivi svolte sta il ms. n. 288 della Biblioteca di Erlangen, già dianzi studiato dal Weidler (negli anni 1727 e 1755) e dal Mannert (nel 1801).

(5) *Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-âge* (Ann. di Matem. T. V, 1863).

Ed invero circa contemporaneamente ed indipendentemente gli uni dagli altri l'Halliwell (1), il Boeckh (2) ed il Nesselmann (3) sollevavano alcuni dubbî intorno all'autenticità della *Geometria* di Boezio, o tutt'almeno del passo che ci interessa (4), dei quali è palese la somma importanza; giacchè ove potesse venire dimostrato che quell' opera proviene da un falsario posteriore a Gerberto, quel passo perderebbe ogni importanza, e non vi sarebbe che riprendere l'antica congettura del Wallis intorno alla genesi del nostro sistema di numerazione, rimpiangendo il tempo e la fatica sprecati. Ora l' esame dei migliori manoscritti della *Geometria* di Boezio non sembra capace di risolvere definitivamente quella che chiamasi oggi " questione boeziana ", onde il campo degli storici è tuttora diviso in due schiere: in quella capitanata dal Boeckh troviamo coloro che credono essere la *Geometria* di Boezio una collezione di estratti di varie opere diffuse per iscritto od a voce, e cioè il Friedlein (5) — più tardi editore di Boezio —, il Weissenborn (6) e l'Heiberg (7); l'altra schiera, sulla cui bandiera sta scritto " autenticità della *Geometria* di Boezio ", annovera come suoi campioni il Cantor (8) ed il Martin. La questione non è ancora risolta, nè probabilmente lo sarà sino al giorno in cui verrà dissepolto qualche altro documento decisivo.

Va però notato come frattanto un gran passo verso la soluzione del problema storico che ci occupa, concepito nella sua forma primitiva, sia stato compiuto dall'orientalista Woepcke con due importan-

(1) *Rara mathematica* (London 1841) p. 107.

(2) *Index lectionum per sem. aestivum* A. 1841 (Berolini, 1841).

(3) Op. cit., p. 102.

(4) Un primo sintomo di tali dubbi trovasi già in Montucla (*Hist. des Math.* T. I, p. 122-123); il quale però più tardi (id. 379) spiega a suo modo le parole di Boezio come fossero autentiche.

(5) Oltre ad articoli sparsi in vari periodici tedeschi, si veda l'opuscolo *Gerbert, die Geometrie des Boetius und die indische Ziffern* (Erlangen, 1861), nonchè vari squarci dell'opera *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und der Römer* etc. (Erlangen, 1869) e Boezio ed. Friedlein.

(6) Si vegga specialmente la memoria *Die Boetius-Frage* nel II fascicolo delle *Abh. zur Geschichte der Mathem.* (Leipzig, 1875) p. 185-240.

(7) *Philologus*, T. XLIII, 1884, p. 508-518.

(8) Oltre all'opera succitata si veggano molti passi del T. I delle *Vorl. über Gesch. der Mathematik.*

tissime memorie. Nella prima (1) delle quali egli spianò la via ad ulteriori ricerche colla pubblicazione del testo del passo controverso quale risulta da due manoscritti della Biblioteca Nazionale di Parigi; pubblicazione che era indispensabile giacchè quel passo è pressochè inintelligibile tanto nell'edizione di Boezio fatta a Venezia nel 1499, quanto in quelle fatte a Basilea nel 1546 e nel 1570. In una memoria posteriore (2), di ancor più grande valore, egli propose una spiegazione attendibilissima della nascita che ebbe e delle peregrinazioni che compì il nostro sistema di numerazione. Premesso che esistono due specie distinte di cifre arabe, usate una esclusivamente dagli Arabi orientali e l'altra da quelli che occuparono l'Africa settentrionale e la Spagna, il Woepcke fece notare che soltanto queste ultime (dette " cifre *gubâr* ") sono di forma simile a quelle da noi adoperate. Osservata poi col Vincent l'esistenza di elementi extra-ellèni nei nomi con cui Boezio designa i numeri 1, 2, ..., 9, e tenuto conto dell'avere il Martin dimostrato (3) inammissibile il soggiorno di Gerberto presso gli Arabi di Spagna (4); ricordando ancora quali vivaci rapporti commerciali ed intellettuali esistessero fra gl'Indiani ed i Greci residenti in Alessandria e come tutto induca ad attribuire l'invenzione delle nostre cifre agli Indiani dei primi secoli dell'E. V.; rilevando da ultimo la somiglianza fra gli *apici* di Boezio e le iniziali dei numerativi sanscriti, concluse essere estremamente probabile che l'invenzione del nostro sistema numerale appartenga agli Indiani e sia stata poi comunicata ai Greci di Alessandria nell'epoca classica del sincretismo. Da essi sarebbe passata ai Neo-Pitagorici (di cui è notoria la propensione ad accogliere le idee braminiche), l'ultimo dei quali è appunto Manlio Severino Boezio; da questo l'avrebbe appresa Gerberto, il quale a sua volta l'avrebbe diffusa in tutta Europa, non esclusa la Spagna; quivi gli Arabi l'avrebbero trovata e se ne sarebbero impadroniti.

Se era nostro imprescindibile dovere fare menzione di un documento che, se fosse stato quale apparve ai primi che lo esami-

---

(1) *Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident* (Roma, 1859).

(2) *Mémoire sur la propagation des chiffres indiens* (Journal Asiatique, IV Série, T. I, 1863).

(3) V. il § IV delle *Recherches* più sopra citate.

(4) Cfr. Montucla, *Hist. des Math.*, T. I, p. 500.

narono, avrebbe fatto splendere di luce nuova ed abbagliante la scuola di Crotone, ora che sembra dimostrato che (ammessolo per degno di fede) non si riferisce se non ai bassi tempi della matematica greca e dà notizia di una pianta esotica dai fatti dimostrato incapace di allignare sotto il cielo dell'Ellade, la questione a cui si riferisce non deve occuparci più a lungo (1). D' altronde, supposto anche per un istante vero tutto quanto si legge nella *Geometria* di Boezio, l'invenzione di Pitagora meriterebbe poco più di una fugace menzione nella nostra storia, dal momento che i Greci, mentre si lasciarono adescare dalle fantasticherie matematiche da lui insegnate, avrebbero lasciato cadere nella polvere la gemma più fulgida ornante la sua corona di scienziato.

Timarida.

24. Alla comunità pitagorica sembra indubbiamente appartenesse un Timarida, di cui Giamblico tramandò ai posteri una pregevole invenzione e che venne esumato da Bouillaud (2). Identificato prima dal Cantor con Timarida da Taranto, immediato discepolo di Pitagora (3), fu dal Martin considerato invece per Timarida da Paros (4), epperò dal Cantor (5), come già dal Nesselmann (6), ritenuto in seguito come circa contemporaneo a Teone Smirneo. Ma più tardi, in conseguenza di alcune osservazioni di P. Tannery (7), il Cantor stesso ritornò alla sua prima opinione (8). Ed a ragione, chè ci sembra estremamente verosimile essere il matematico di cui ci

(1) Le indagini più recenti sull'argomento da noi sfiorato sono riassunte a p. 108-119 dell'opuscolo di E. Goblet d'Alviella intitolato *Ce que l'Inde doit à la Grèce* (Paris, 1897).

(2) Cfr. Montucla, *Hist. des Math.*, T. I, p. 317.

(3) *Math. Beiträge* etc., p. 97.

(4) Ann. di Matematica, T. V, 1863, p. 281.

(5) *Vorlesungen*, T. I, 1.ª ed. (Leipzig, 1880), p. 370.

(6) *Die Algebra der Griechen*, p. 232.

(7) V. gli articoli *Sur l'âge du phytagoricien Thymaridas* (Ann. de la Fac. des Lettres de Bordeaux, T. III, 1881, p. 101-104) e *Sur l'arithmétique pythagoricienne* (Bull. des Sciences math., II Série, T. IX, 1885); inoltre *Pour l'histoire de la science hellène* (Paris, 1887) p. 382-386.

(8) *Vorlesungen*, T. I, 2.ª ed. (Leipzig, 1894) p. 147.

dobbiamo ora brevemente occupare l'antico pitagorico Timarida da Taranto.

A Timarida si attribuisce la definizione di unità come *quantità terminante* (περαίνουσα ποσότης) ed il nome di *rettilinei* (εὐθυγραμμικοί) pei numeri primi: gli è appunto questa denominazione, la cui antichità è attestata da un frammento di Speusippo (cf. L. I, n. 65), che serve come argomento principale per determinare l'epoca a cui appartiene Timarida. Ma non quella definizione, nè questo nome sono i maggiori suoi titoli di gloria. Lo è invece un metodo, che egli ha inventato e che Giamblico ha serbato, per dedurre il valore di x da un sistema di equazioni della forma seguente:

$$x + x_1 = a_1 \ , \ x + x_2 = a_2 \ , \ \dots \ , \ x + x_n = a_n \ , \ x + x_1 + \dots + x_n = a.$$

Il metodo di Timarida è espresso dalla formola

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n - a}{n - 1} \ (1),$$

la quale evidentemente si ottiene sottraendo l'ultima equazione dalla somma delle prime n e dividendo per $n - 1$ il risultato. Il metodo stesso è chiamato da Giamblico ἐπάνθημα (2) (donde *florida sententia,* del Tennulio, primo editore di Giamblico); ma non è a credere fosse questo un nome speciale al ritrovato di Timarida, giacchè il nome di *epantema* (il cui significato è *iperfioritura*) era attribuito a tutti quegli sviluppi che venivano aggiunti ai trattati classici di aritmetica per uso degli studenti di filosofia (3).

Dell'*epantema* di Timarida Giamblico fa applicazione alla ricerca delle soluzioni in termini minimi dei sistemi indeterminati seguenti:

$$x_1 + x_2 = 2(x_3 + x_4) \ , \ x_1 + x_3 = 3(x_2 + x_4) \ , \ x_1 + x_4 = 4(x_2 + x_3);$$

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}(x_3 + x_4) \ , \ x_1 + x_3 = \frac{4}{3}(x_2 + x_4) \ , \ x_1 + x_4 = \frac{5}{4}(x_2 + x_3).$$

(1) Il primo ad interpretare le parole in cui Giamblico fa conoscere il procedimento di Timarida fu il Nesselmann (v. op. cit., p. 232-236).

(2) Θυμαριδείου ἐπανθήμα (Giamblico, ed. Pistelli, p. 62).

(3) *Notices et extraits des manuscrits etc.*, T. XXXI, 2.ª Partie, 1886, p. 244. V. anche P. Tannery, *Pour l'histoire de la science hellène* (Paris, 1887) p. 386.

Per vedere come si possa effettuare tale applicazione si osservò che ad es. il primo di questi sistemi, se si pone

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = S,$$

diviene

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3} S \quad , \quad x_1 + x_3 = \frac{3}{4} S \quad , \quad x_1 + x_4 = \frac{4}{5} S$$

e dà anzitutto

$$x_1 = \frac{73 S}{120};$$

quindi

$$x_2 = \frac{7 S}{120} \quad , \quad x_3 = \frac{17 S}{120} \quad , \quad x_4 = \frac{23 S}{120};$$

ciò prova che la soluzione minima corrisponde a $S = 120$ ed è pertanto

$$x_1 = 73 \quad , \quad x_2 = 7 \quad , \quad x_3 = 17 \quad , \quad x_4 = 23.$$

Che tale applicazione sia proprio dovuta a Timarida non possiamo asserire; ma il fatto solo che esiste basta a crescere il valore dell' *epantema*.

III.

L'aritmetica nell'Accademia.

25. Altre notizie sulla scienza aritmetica dei Pitagorici si ottengono indirettamente esaminando (come ora ci apprestiamo a fare) le cognizioni sopra i numeri possedute dal più illustre dei discepoli di Pitagora (1), cioè Platone (2).

---

(1) « I Pitagorici, di cui Platone addotta spesso il parere », scrive Teone Smirneo (ed. Dupuis, p. 18); « Plato, studiosissimus Pythagorae » dice Boezio (ed. Friedlein, p. 139).

(2) Riguardo a Platone come matematico, veggansi i lavori citati in nota al n. 55 del L. I. Maggiori notizie su tale soggetto si avrebbero se si potesse ritrovare l'opera *Il Platonico*, composta da Eratostene e ricordata da Teone Smirneo (ed. Dupuis, p. 99).

Rileviamo anzitutto che alle sue opere si deve in massima parte se si è conservata la netta distinzione, formulata dal filosofo di Samo, fra l'aritmetica teorica e l'aritmetica pratica, fra lo studio delle proprietà dei numeri e la determinazione dei procedimenti di calcolo, fra ἀριθμητική e λογιστική. Della prima soltanto si è occupato il " divino filosofo ", ritenendo che " l'aritmetica, per sua natura, sembra appartenere a tutto ciò che eleva l'anima verso la pura intelligenza, e la guida alla contemplazione dell'essere (1) "; e confermava le sue preferenze sentenziando che " l'arte del calcolo non deve essere trattata come fa il volgo, ma in modo da guidare gli uomini a conoscere l'essenza dei numeri (2) ". Dai suoi maestri tolse la distinzione dei numeri in pari e dispari, assegnando, come facevano i Pitagorici, ai primi il posto più onorevole; ma, mentre questi posero l'unità tanto fra i pari che fra i dispari, egli a ragione la pose nella categoria dei secondi. Egli conobbe eziandio la distinzione dei numeri non primi in quadrati ed oblunghi, in cubi e non cubi, nonchè le grandezze irrazionali quadratiche e cubiche (3). Anzi in uno de' suoi più celebri dialoghi egli ha reso conto di alcuni risultati ottenuti dal suo maestro Teodoro da Cirene (4), dei quali è dovere nostro fare qui menzione più precisa di quanto abbiamo fatto prima (v. L. I, n. 34):

Le radici quadrate — si legge nel *Teeteto* — ci vennero illustrate da Teodoro mediante disegni (geometrici), dimostrando egli che i lati dei quadrati contenenti 3 e 5 piedi quadrati sono incommensurabili con la lunghezza di 1 piede. Inoltre egli si propose il medesimo problema per ciascuno dei quadrati seguenti, sino a quello contenente 17 piedi, oltre al quale però egli non si è spinto (5).

Maggiori particolari sulle ricerche di Teodoro non si hanno — anzi le parole di Platone sono di interpretazione non facile (6). — È tuttavia pressochè evidente che esse furono ispirate dalla dimostrazione dell'irrazionalità della diagonale del quadrato, che si ri-

(1) Teone ed. Dupuis, p. 6. Cfr. anche una nota al n. 56 del L. I.

(2) Id., p. 8.

(3) Rothlauf, *Die Mathematik zu Platon's Zeiten und seine Beziehungen zu ihr* (München, 1878) p. 27.

(4) Susemihl, *Geschichte der griechiischen Literatur in der Alexandrinerzeit*, T. I (Leipzig, 1891) p. 12-13.

(5) Debbono naturalmente escludersi i numeri 4, 9, 16, che sono quadrati perfetti.

(6) Cf. Friedlein, *Zu Platon's Theaetetos* (Neue Jahrbuch, für Phil. und Ped., Vol. CVII, 1873, p. 215-216).

tiene immaginata nella scuola pitagorica (cfr. L. I, n. 81), e che Euclide ha eternata coll' accoglierla nel X Libro de' suoi *Elementi*. È poi assai probabile (1) che Teodoro da Cirene per rappresentare $\sqrt{3}$ sia ricorso all' altezza di un triangolo equilatero avente per lato 2 unità, e che alla rappresentazione di $\sqrt{5}$ sia giunto considerando un triangolo rettangolo di lati 1 e 2. Pure mediante convenienti triangoli rettangoli egli presumibilmente ha rappresentate le radici di 8, 10, 15 e 17, e precisamente servendosi delle seguenti identità:

$$\sqrt{8} = \sqrt{3^2-1} \quad , \quad \sqrt{10} = \sqrt{3^2+1} \quad , \quad \sqrt{15} = \sqrt{4^2-1} \quad , \quad \sqrt{17} = \sqrt{4^2+1} .$$

Col mezzo poi di $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ (radici già ottenute) Teodoro era in grado di rappresentare le quattro restanti radici quadrate, e precisamente coll' ajuto di altri triangoli rettangoli, come è espresso dalle relazioni:

$$\sqrt{6} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} \quad , \quad \sqrt{7} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} \, ,$$

$$\sqrt{11} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2} \quad , \quad \sqrt{14} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{2})^2} \, .$$

Che poi Teodoro abbia anche ottenuti dei valori approssimati di quelle radici quadrate, sfruttando i metodi egiziani comunicati a lui da Pitagora, e precisamente rappresentandole mediante somme del seguente tipo

$$a + \sum_n \frac{a_n}{2^n} \, ,$$

(ove a sono numeri suscettibili dei valori 0 e 1), è una supposizione (2) che ci sembra avere bisogno di novelle conferme.

26. Platone, al dir di Aristotele, distinse gli ἀριθμοὶ εἰδηθικοί dagli ἀριθμοὶ μαθηματικοί, comprendendo sotto questo ultimo nome quei numeri generali che Euclide rappresentava mediante segmenti rettilinei e

(1) Per quanto segue v. il § III della memoria di F. Hultsch *Die Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes* (Götting. Nachrichten, 1893).

(2) Di F. Hultsch; v., oltre il lavoro testè ricordato, la memoria *Die ägyptische Theilungsrechnung. I Abh.*, p. 91 (Abh. der k. sächs. Ges. der Wiss., T. XVII, 1895).

che da noi si sogliono indicare con delle lettere. Dei *numeri armonici* (ἀριθμοὶ ξύμφωνοι) considerati del divino filosofo non si è serbato che il nome; nessun dubbio però che fossero collegati alla teoria matematica della musica. Ignoto è pure qual fosse un numero al quale il nostro filosofo (ispirandosi al misticismo aritmetico professato da Pitagora) assegnò un importantissimo ufficio sociale e sul quale (se non altro per la celebrità di cui gode) è dovere arrestarci qualche istante.

Dopo avere spiegata la costituzione della città ideale ed esposte le leggi relative all'organizzazione delle famiglie, Platone, in principio dell'VIII Libro della *Repubblica,* pretende indicare le cause delle rivoluzioni degli stati, cause fatali e possenti, a cui non resiste nemmeno la costituzione di cui egli tracciò il piano, per quanto fosse da lui giudicata di somma solidità.

La dissoluzione dello stato comincia — secondo le idee di Platone — colla dimenticanza di quelle leggi misteriose che governano i matrimoni e la procreazione dei figli. E qui il nostro filosofo, invocate le Muse, si propone di assegnare il numero che rappresenta la parte fondamentale in questo lato dell'ordinamento sociale, quel numero (da lui detto ἀριθμὸς γεωμετρικός) che è “ arbitro delle nascite buone e cattive, non conoscendo il quale, se i governanti congiungono fuor di tempo una sposa ad uno sposo, nasceranno figli di cattiva indole e disgraziati ”, quel numero che è chiamato, per ricordare il suo ufficio, *numero nuziale.* La conoscenza di tal numero non poteva, secondo il modo di vedere platonico, essere comunicata al volgo, onde Platone lo presenta come quello che risolve una specie di enigma che egli pone in bocca al personaggio di Socrate.

Esiste — dice questi — pel generato divino un periodo abbracciato da un numero perfetto, ma per l'umano vi è un primo numero, somma di quantità generatrici e generate, comprendente tre intervalli a quattro termini di quelli che danno cose simili e dissimili, che crescono o decrescono, e non presentano che rapporti analogici e razionali. La base epitrite presa fra questi rapporti, aggiunta a 5, dà una somma che, moltiplicata tre volte, offre due armonie, una quadrata eguale a 100 volte 100, l'altra della stessa lunghezza in un senso ed allungata nell'altro per 100 cubi di 3 e 100 quadrati di diametri razionali di 5, questi quadrati essendo diminuiti ciascuno di un'unità, o di 100 quadrati delle diagonali irrazionali, questi quadrati essendo diminuiti ciascuno di 2 unità. Gli è questo numero geometrico intero che ha la proprietà di presiedere alle generazioni buone e cattive.

La grande oscurità di questo passo non dipende dall'essere il testo relativo corrotto o dall'essere necessario per intenderlo fami-

gliarità con il linguaggio e le idee di Platone: infatti i filologi più competenti intorno all'esegesi platoniana garantiscono che quel testo ci è pervenuto sotto forma perfetta, e d'altronde, se la laconicità dei commentatori più antichi (ad es. di Aristotele) condurrebbe a ritenere che quel passo fosse intelligibile ai posteri immediati di Platone, è noto che la difficoltà di interpretarlo era proverbiale sin dall'epoca di Cicerone. E siccome in generale si ebbe fede nell'esistenza di un numero soddisfacente a tutte le condizioni assegnate da Platone (1), così innumerevoli sono i tentativi fatti per trovarli, e numerosissime le soluzioni dell'indovinello proposto dal fondatore dell'Accademia. Queste, ottenute come frutto di pazienti investigazioni, accompagnate da ardite congetture, vennero accolte dagli uni con entusiasmo e con disprezzo dagli altri. Tutte hanno come base un'analisi microscopica del testo, onde appartengono più alla filologia che alla matematica: ciò non ostante val la pena di indicare i fondamenti e le conclusioni delle più salienti, meno per far misurare al lettore l'entità delle divergenze esistenti fra di esse, che per *segnalare quali cognizioni aritmetiche vennero presupposte in conseguenza in Platone.*

27. Cominciamo a ricordare le soluzioni di più antica data (2). Tacendo di Proclo — il quale non volle o non seppe spiegare il passo in questione e, ad ogni modo, non arrecò alcun contributo alla questione che ci occupa — noteremo l'opinione di Filone Alessandrino, secondo cui il numero nuziale sarebbe semplicemente $3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$, mentre Volterrano oscillava tra $(3+4+5)^3 = 1728$ e $(3+4+5)^4 = 20736$.

Cardano propose $2^6(2^7 - 1) = 8128$, il P. Mersenne 729, Schneider e Schleiermacher $216^2 = 46656$, e Fries 5040; T. Taylor invece suggerì 10000 (3), come numero esprimibile sotto la forma seguente: $7 \times 989 + 300 + 77 + 100 \times 3^3$.

(1) Tal fede non è condivisa da D. B. Munro il quale scrisse: « the number of Plato was woven of fragments from wacking realities und may still serve to indicate what these realities were » (*The Number of Plato,* in Journal of Philology, T. VIII, p. 275 e seg.).

(2) Cf. Günther, *Die Platonische Zahl* (Berichte der k. Leop.-Akad., XVIII Heft, p. 148 e seg.) e *Mathematisch-Philologisches über eine Stelle im Platonischen « Staat »* (Blätter für des Bayr. Gymnasialwesen, XIX Bd., p. 119 e seg.).

(3) *Theoretic Arithmetic* (London 1816), p. 150-160.

Una più elaborata base ha l'interpretazione che il Vincent ha proposta (1) e Th. H. Martin ha sviluppata (2); essa ha come piattaforma la considerazione delle quattro seguenti proposizioni geometriche:

$$
\begin{array}{l}
1 : 1 : 1 \ : 1 \\
1 : 2 : 4 \ : 8 \\
1 : 3 : 9 \ : 27 \\
1 : 6 : 36 : 216,
\end{array}
$$

e di un triangolo rettangolo simile a quello avente per lati i numeri 3, 4, 5 ed il cui cateto minore è il numero

$$216 = 1^3 \times 2^3 \times 3^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3;$$

di tale triangolo sono lati i numeri 216, 288, 360; il suo perimetro, cioè 864, sarebbe, secondo gli eruditi testè citati, il numero nuziale; esso gode delle proprietà che esprimono le seguenti identità:

$$864 = 216 \times \frac{3+4+5}{3} = 8^2 + 8 \times 100 = 7 \times 100 + 2 + 3^3 \times 6 .$$

Invece nelle *Opere* di Platone ed. Didot (Vol. III, Paris, 1873) viene proposto il numero 7500; è la proposta che fece J. Hunziker, che lo Zeller ed il Rothlauf (3) adottarono, osservando essere

$$3 : 4 = 7500 : 10000.$$

P. Tannery, nel proporre una nuova soluzione (4), ammise che Platone abbia fatto parlare Socrate nel modo più esplicito e ne dedusse che il numero cercato è $100 \times 3^3 = 2700$: non è il caso di arrestarci sopra questa interpretazione, che l'autore stesso ha abban-

(1) *Sur le nombre de Platon* (*L' Institut*, n.° 39, Settembre 1845): cf. anche *Notice sur divers manuscrits grecs relatifs à la musique* (Notices et entraits des manuscrits etc., T. VI, 2.e Partie, p. 184-194).

(2) *Le nombre nuptial et le nombre parfait de Platon. Explication d'une enigme mathématique qui se trouve an commencement du VIII Livre de la République* (Revue archéologique, T. XIII, 1857).

(3) Mem. cit., p. 29.

(4) *Le nombre nuptial dans Platon* (Revue philosophique, T. I, 1876, p. 170 e seg.).

donata (1) dopo di avere conosciute le indagini di J. Dupuis (2). Secondo le quali il numero cercato sarebbe il prodotto di 100 pel minimo numero divisibile per tutti i termini delle due progressioni:

$$1 : 2 : 4 : 8 \qquad\qquad 1 : 3 : 9 : 27;$$

siccome $8 \times 27 = 216$ è questo numero minimo, così il numero di Platone sarebbe $21600 = 100\,(3^3 + 4^3 + 5^3)$. Riguardo a tale soluzione noteremo che, mentre il Tannery (3) — quantunque dissentisse dal Dupuis in alcuni punti secondarî — ammise essere dessa la più plausibile, non soltanto fra quelle proposte prima, ma anche fra quelle che si possono sperare, un altro giudice non meno competente (4) la dichiarò assolutamente inammissibile dal punto di vista filologico ed in conseguenza sentenziò che anche dopo gli sforzi del Dupuis il passo in questione resta avvolto in un' oscurità impenetrabile.

Sembra che il Dupuis stesso abbia riconosciuto, in parte almeno, la giustezza degli appunti rivoltigli, giacchè abbandonò la sua proposta e suggerì invece (5) come numero nuziale il 760000, numero che dà luogo alle relazioni seguenti:

$$760000 = 100 \times 100 + 100 \{27 \times 100 + 48 \times 100\} =$$
$$= \left(5 + \frac{4}{3}\right) \times 3 \times 4 \times 10000 = \left(5 + \frac{4}{3}\right) \times 3 \times 1000\,(4 + 8 + 12 + 16).$$

Senza far eco alle lodi entusiastiche che vennero tributate a questa nuova proposta da chi (6) proclamò essere le tenebre state finalmente dissipate dal Dupuis, aggiungendo che questi ha trionfato

---

(1) *Revue philosophique*, T. XV, 1883, p. 568.

(2) *Le nombre géométrique de Platon. Interprétation nouvelle* (Paris, 1881).

(3) *Revue philosophique*, T. XIII, 1881, p. 210.

(4) J. L. Heiberg in *Revue critique d'histoire et de littérature* (Nouv. Série, T. XII, 1881, p. 28).

(5) *Le nombre géométrique de Platon. Seconde interprétation* (Paris, 1882) e *Le nombre de Platon. Mémoire définitif*, in appendice alla edizione già citata di Teone Smirneo.

(6) P. A. Bertauld nel *Bull. di Bibl. e Storia delle Scienze matem. e fisiche*, T. XVIII, 1885, p. 441-450.

su un testo riputato inintelligibile e che pertanto è finalmente risoluto un problema che ha tanto esercitata la sagacia di commentatori e traduttori, preferiamo asserire, con P. Tannery (1), che con i lavori testè citati del Dupuis il problema di determinare il numero di Platone ricevette delle dilucidazioni parziali ma definitive. Tale giudizio è condiviso in gran parte da F. Hultsch (2); il quale però, dissentendo in certi punti dall'interpretazione data dal Dupuis, ritenne che il numero nuziale debba essere assai grande ed esprimibile tanto come un quadrato quanto come un rettangolo; in conseguenza, ed in base ad altre considerazioni, suggerì come numero di Platone

$$12960000 = \overline{3600}^2 = \left(700\sqrt{\frac{48}{7}}\right)\left(2700\sqrt{\frac{48}{7}}\right) \text{(3)}.$$

Alla medesima conclusione arrivò, per via differente, J. Adam (4), il quale si giovò degli studî precedenti e si fondò sulle identità

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 \quad , \quad [(3+4+5)5]^4 = \overline{3600}^2 = 4800 \times 2700 ;$$

siccome nulla autorizza considerare queste note a Platone, così — come osserva M. Cantor (5) — manca ancor qualche cosa perchè si possa ammettere coll'Adam che quella da lui proposta sia la soluzione completa del problema di determinare il numero di Platone.

Chiuderemo questa rassegna notando che, anteriormente al lavoro dell'Adam, ma dopo quello di F. Hultsch, furono proposte due nuove soluzioni, una in Inghilterra e l'altra in Germania.

Quella (6) ha per base una interpretazione delle riferite frasi di Platone che si desume dagli scolii di Alessandro d'Afrodisia alla

(1) *Revue philosopique*, T. XV, 1883, p. 573.

(2) *Die geometrische Zahl in Platon's VIII Buch von Staat* (Zeitschr. f. Math. u. Phys,, T. XXVII, 1882, Hist.-lit. Abth., p. 41 e seg.). Cf. P. Tannery in *Revue philosophique*, T. XV, p. 567-573 e J. L. Heiberg in *Philologus*, T. XLIII, 1884, p. 473.

(3) *The Plato's number: its solution and significance* (London, 1891).

(4) V. anche lo scritto dello stesso Hultsch *De numero Platonis a Proclo enarr. Disputatio* pubblicato dallo Schoell in *Procli Commentariorum in remp. Platonis partes ineditae*.

(5) Zeitschr. f. Math. und. Phys., T. XXXVII, 1892, Hist.-lit. Abth., p. 55.

(6) Gow, « *Platos* » *number* in The Academy, 1882, p. 322.

Metafisica di Aristotele, ed ha per conclusione la proposta che il numero di Platone fosse il

$$3600 = 3^2 \times 4^2 \times 5^2 = 9 \times 16 \times 25.$$

L'altra (1) ha come suo fondamento la seguente quadruplice decomposizione del numero 100:

$$9+9+9+9+16+16+16+16 \quad , \quad 9+27+64 \quad , \quad 6^2+8^2 \quad , \quad 2\times 50;$$

secondo essa il numero nuziale sarebbe 1000.

28. L'indole dell'opera presente non ci permette di discutere le soluzioni ottenute e nemmeno di esporre partitamente quali legami esistano fra queste e le proposizioni aritmetiche enumerate. Solo notiamo, riepilogando le soluzioni proposte per l'enigma di Platone (2), che i sedici numeri suggeriti come rispondenti alle imposte condizioni, in ordine di grandezza crescente sono:

50 , 729 , 864 , 1000 , 1728 , 2700 , 3600 , 5040 ,

7500 , 8128 , 100000 , 20736 , 21600 , 46656 , 760000 , 12960000.

Se essi sono assai differenti fra loro, le argomentazioni formulate per dimostrarli corrispondenti alle condizioni imposte hanno un carattere comune, quello cioè di ammettere nel celebre filosofo una grande famigliarità con i numeri della serie naturale. Ora che questa supposizione corrisponda alla realtà, è provato dall'ulteriore esame un po' accurato delle opere di lui, che c'impegnammo (L. I, n. 58) di fare e che ora imprendiamo.

Esso prova infatti che le sue cognizioni sulla divisibilità dovevano essere abbastanza estese; altrimenti, come avrebbe potuto asserire nel V Libro delle *Leggi* che il numero 5040 possiede 59 divisori, fra cui non è compreso 11, e che basta da 5040 togliere 2 per ottenere un multiplo di 11?

(1) Demme, *Die Platonische Zahl* (Zeitschr. f. Math. und Phys., T. XXXII, 1887, Hist.-lit. Abth., p. 81 e 121).

(2) Oltre a quelle riferite, una — al dire dell'Adam — venne proposta dal Barozzi nel 1566; un'altra è consegnata nell'opuscolo del Bramis, *De numero Platonis* (Vratislaviae, 1830), di cui non conosciamo che l'esistenza.

Inoltre molti passi di quelle opere attestano la profonda conoscenza che Platone possedeva delle proporzioni, il che concorda con l'essere egli annoverato fra i discepoli di Pitagora, nella cui scuola le proporzioni sorsero forse e certo prosperarono. Aggiungasi che Nicomaco da Gerasa attribuisce a Platone i teoremi (*Elementi* di Euclide, Lib. VIII, prop. 11 e 12) " fra due quadrati vi è una media proporzionale, fra due cubi ve ne sono due (1) ". Finalmente Proclo (2) fa merito a Platone di avere inventato un procedimento per costruire un triangolo rettangolo in numeri, analogo a quello attribuito a Pitagora (v. n. 21), ma differente e quasi complementare di esso. Ecco in che cosa consiste: si prenda come primo cateto un numero pari arbitrario a, allora come secondo cateto si potrà assumere $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1$, e come ipotenusa $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$. Applicandolo si trovano successivamente i seguenti triangoli:

$$(4, 3, 5) \; , \; (6, 8, 10) \; , \; (8, 15, 17) \; , \; (10, 24, 26) \; , \; \ldots ,$$

alcuni dei quali si ottengono con un semplice raddoppiamento dei lati di triangoli già noti, mentre altri sono totalmente nuovi.

Quale sentiero abbia battuto Platone per giungere all' enunciata regola, è difficile dire. Ma vi è un ragionamento che conduce ad essa ed anche a quella di Pitagora (3), tanto semplice che crediamo opportuno indicarlo come quello che forse (sott' altra forma) avranno adoperato gli antichi.

Siano x, y, z tre numeri interi fra loro primi od aventi 2 per massimo comune divisore; x, y siano cateti e z ipotenusa di un triangolo rettangolo. Essendo

$$x^2 + y^2 = z^2$$

sarà

$$x^2 = (z + y)(z - y). \tag{1}$$

(1) Il Rothlauf (op. cit., p. 35-38) ha rilevato un passo delle opere di Platone ove tale proposizione è applicata. Così tolse ogni indeterminatezza all' asserzione di Hankel (*Zur Geschichte der Mathem.* etc., Leipzig, 1874, p. 131): « diese zwei Theoreme werden wohl schon den Platonikern im Wesentlichen bekannt gewesen sein ».

(2) Proclo-Taylor, T. II, p. 206.

(3) A quest' ultima si può giungere con un metodo ancora più elementare che venne segnalato da R. Klimpert (*Storia della geometria*, trad. P. Fantasia, Bari 1901, p. 24).

A questa relazione si soddisfa ponendo

$$z + y = x^2 \quad , \quad z - y = 1$$

onde

$$y = \frac{x^2 - 1}{2} \quad , \quad z = \frac{x^2 + 1}{2}$$

affinchè y e z risultino interi dev' essere x dispari, ed allora y e z sono dati dalla regola di Pitagora. Ma quella relazione è verificata anche ponendo

$$z - y = 2 \quad , \quad z + y = \frac{x^2}{2},$$

onde

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 \quad , \quad z = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 ;$$

quì, affinchè y e z risultino interi, x deve essere pari, ed in tale supposizione si ritrova la regola di Platone. Ognun vede come nulla autorizzi a negare a Pitagora e Platone la capacità di immaginare la sostanza di questa elementarissima argomentazione. E si noti che la stessa guida alla regola più generale indicata da Euclide nel X Libro degli *Elementi* (prop. 28 e 29; cfr. L. II, n. 19); posto infatti $x = bc$, alla relazione risultante dalla (1), cioè alla

$$b^2c^2 = (z + y)(z - y),$$

si può soddisfare ponendo

$$z + y = b^2 \quad . \quad z - y = c^2,$$

onde

$$y = \frac{b^2 - c^2}{2} \quad , \quad z = \frac{b^2 + c^2}{2},$$

conformemente alla regola di Euclide.

Riguardo al metodo di Platone per costruire dei triangoli rettangoli in numeri razionali, va notato che, nella *Geometria* che porta il nome di Boezio (cf. n. 23), esso viene attribuito ad Archita; onde è verosimile (1) che esso sia stato realmente inventato dal celebre tarantino; questi l'avrà insegnato a Platone, il quale più tardi lo avrà pubblicato senz' indicare la fonte a cui aveva attinto.

---

(1) Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid* (Dublin, 1889), p. 108.

29. Ritorniamo ancora, e per l'ultima volta, al passo della *Repubblica* ove Platone parla del numero nuziale, per fare due osservazioni.

La prima si riferisce alla frase " diametro razionale di 5 " ivi adoperata; con essa Platone intendeva di designare il numero 7 come massimo intero contenuto nella diagonale del quadrato avente per lato 5, cioè in $\sqrt{50}$; basta questa semplice frase per fare risalire (come vorrebbe P. Tannery (1)) a Platone la generazione esposta da Teone Smirneo (2) dei " numeri diametrali e laterali " (v. n. 35), ossia la soluzione delle due equazioni indeterminate

$$2x^2 - y^2 = \pm 1 ?$$

Noi incliniamo a rispondere negativamente, giacchè la considerazione del massimo intero contenuto in un numero razionale è così spontanea che non presuppone nè trae seco quella assai più artificiosa e riposta di numeri diametrali e laterali.

Nel medesimo passo è fatto cenno di un *numero perfetto* concernente la generazione divina, cioè di un numero che regola le rivoluzioni degli astri. Qual era tal numero? Esclusa l'ipotesi che la parola " perfetto " fosse presa nel consueto suo significato aritmetico, si può adottare l'opinione di Aristide Quintiliano (3), che il numero perfetto di Platone fosse 360, cioè il prodotto di 3, per 10 e pel perimetro del celebre triangolo rettangolo avente per lati 3, 4, 5. Ma è forse miglior consiglio il seguire F. Hultsch (4) il quale, escludendo che Platone alludesse ad alcuno dei numeri (1, 3, 4, 6, 7, 10) in cui gli antichi avvertirono qualche perfezione (5), suggerì di riserbare lo studio di quella frase a quando si sarà in possesso di notizie sicure intorno alle osservazioni astronomiche i cui risultati vennero trasportate in Grecia dall' Egitto e da Babilonia anteriormente a Platone. Per tale ragione non è il caso di arrestarci ulteriormente sulla determinazione di un numero il quale, anche se fosse noto, avrebbe più interesse per lo storico dell'astronomia che per quello dell' aritmetica. Ma un cenno almeno ne andava fatto

---

(1) *L'éducation platonicienne,* II Article (Revue philosophique, T. XI, 1881), p. 291.

(2) Ed. Dupuis, p. 70.

(3) Riferita dal Martin nella memoria citata nel n. 26 del presente Libro.

(4) Zeitschr. f. Math. und Phys., T. XXVII, 1882, Hist.-lit. Abth., p. 56.

(5) Cfr. la memoria del Demme indicata nel n. 26.

per presentare una novella conferma di ciò che risulta da tutto quanto esponemmo in questo Cap., dell'essere cioè Platone matematico imbevuto delle idee di Pitagora, le quali egli non faceva che esporre, talvolta svolgere e più spesso applicare.

Tale indirizzo prettamente pitagorico delle ricerche aritmetiche dell'Accademia è confermato da un passo — di cui già ci occupammo (L. I, n. 65) — dei *Theologumena arithmetica* ove si legge la seguente notizia:

Speusippo, figlio di Potone, sorella di Platone, a cui egli succedette nell'Accademia prima di Zenocrate, non smise di studiare le lezioni dei Pitagorici e soprattutto gli scritti di Filolao; egli compose un graziosissimo libro che intitolò ***Sui numeri pitagorici***. Dal principio sino alla metà egli tratta con rara eleganza: 1.° dei numeri lineari, poligonali, piani e solidi di ogni specie; 2.° di cinque figure che si attribuiscono agli elementi del mondo, delle loro proprietà e simili; 3.° delle proporzioni continue e discontinue. La seconda metà del libro è consacrato alla decade.

Tale opera di Speusippo andò perduta; egual sorte toccò a quella *Sui numeri* e alla *Teoria dei numeri* che Diogene Laerzio attribuisce a Senocrate, successore di Speusippo: sicchè il quadro che ci sta innanzi dell'opera aritmetica della scuola platonica è assai incompleto.

E poco meno imperfetta è la nostra cognizione dell'influenza che esercitarono, oltre i confini dei giardini di Accademo, le incessanti esortazioni di Platone allo studio delle proprietà dei numeri. Coloro che erano destinati a subirla direttamente furono gli scienziati che erano adunati nel Museo di Alessandria ed i loro contemporanei o discepoli; ora, mentre ad essi devesi se la geometria raggiunse un'altezza insperata, non lasciarono una collezione di lavori aritmetici comparabile a quella che determinò il periodo aureo della geometria greca. Vero è che nei libri aritmetici di Euclide (v. L. II, n. 17-20) troviamo ottimamente sistematizzati i fondamenti dell'aritmetica; ma l'abbigliamento geometrico nel quale questa viene ivi presentata da Euclide, per quanto elegante, fu riguardato dai posteri piuttosto come un travestimento che importava togliere: sicchè, se in geometria tutti, volenti o nolenti, dobbiamo riguardarci per discepoli del sommo alessandrino, in aritmetica dobbiamo piuttosto considerarci per seguaci di Pitagora. Nè come veri e propri capi-scuola in aritmetica sono da considerarsi Archimede ed Apollonio, malgrado gli studî che già conosciamo (n. 8 e 9) ed altri che ci occuperanno poi (n. 60). Nè tampoco merita tale dignità Eratostene, almeno se giudicato in base al suo procedimento empirico per costruire una ta-

vola di numeri primi (v. L. II, n. 51), nè Ipsicle per avere formulato alcune proposizioni notevoli sulle progressioni (v. L. III, n. 29) e per avere concepito in generale — come attesta Diofanto — i numeri poligonali.

Una prova indiretta dell'assenza durante il periodo greco-alessandrino di una vera scienza aritmetica, una nel metodo, ma varia ne'risultati, sta in ciò, che più tardi fu ritenuto utile al progresso della scienza l'abbandono delle considerazioni aritmetico-geometriche preferite da Euclide e da' suoi contemporanei, per riprendere l'esame diretto della serie naturale dei numeri. È quello che fu fatto dai Neopitagorici e dai Neoplatonici.

Quali risultati siansi così ottenuti vedremo nel Cap. seguente. Ma fin d'ora va notato come la sconfinata ammirazione per Pitagora e Platone abbia impedito ai loro seguaci di purificare l'aritmetica, eliminandone l'elemento mistico; in conseguenza le aggiunte fatte hanno lo stesso stile delle teorie antiche, il che rende estremamente malagevole il discernere gli elementi di queste dalle addizioni posteriori.

IV.

Neopitagorici e Neoplatonici.

30. Le varie fasi di sviluppo della geometria greca presentano fra di loro quella concatenazione che lega causa ad effetto, antecedente a conseguente, concatenazione tanto salda che non fu turbata nemmeno dai cambiamenti nella sede degli studiosi nè dalla diversità delle razze a cui appartennero. Assurta, dopo Talete, per merito specialmente di Pitagora, alla dignità di scienza, essa presentasi tosto sotto quei lineamenti rigorosamente scientifici, che erano destinati ad accentuarsi durante il periodo aureo della geometria greca ed a non perdersi nemmeno nell'èra dei commentatori, nell'epoca di decadenza, in quello che noi chiamammo periodo argenteo.

Per converso nella storia dell'aritmetica dei Greci si possono notare due indirizzi schiettamente distinti. L'uno, che ha il suo fondamento principale nella rappresentazione dei numeri mediante segmenti di retta e dei loro prodotti mediante aree rettangolari, ha la propria ragione di essere nella spiccata vocazione del popolo ellè-

nico per lo studio dei fenomeni plastici, ha oggi come proprio unico rappresentante Euclide (Lib. VII-X degli *Elementi*), non essendosi sottratte all'ingiuria del tempo le altre opere congeneri, che certamente avranno esistito. Nell'altro indirizzo procedono quelle esposizioni veramente pure, non contenenti, cioè, alcun elemento estraneo alla natura del numero; le scaturigini ed il primo stadio di svolgimento di tale procedimento esistono nella scuola di Pitagora. L'aritmetica così concepita diviene proprietà di tutti in Atene, grazie all'insegnamento di Platone, ma bentosto scompare, ecclissata forse dalla disciplina sorella, imperante dispoticamente per volere di Euclide; però finisce per riprendere il sopravvento nell'istante del rinascimento del Pitagorismo. È di questo ritorno all'antico che dobbiamo ora occuparci (1), specialmente perchè esso è preludio, e forse preparazione della comparsa di una stella di prima grandezza, l'ultima che troveremo nel cielo matematico dei Greci, cioè della comparsa di Diofanto.

Nicomaco da Gerasa.

31. La prima opera di aritmetica pura che si presenta al nostro esame è quella *Introduzione aritmetica* (εἰσαγωγὴ ἀριθμητική) in due libri che scrisse Nicomaco (2), nato a Gerasa, città di ubicazione mal nota, ma probabilmente sita in Arabia. Siccome in uno scritto di Nicomaco sulla *Musica* è citato Trasillo, che visse sotto Tiberio, e siccome Nicomaco è ricordato da Pappo, così è probabile che egli abbia vissuto sullo scorcio del I secolo dell'E. v. od al principio del II. Che le sue opinioni lo facessero ascrivere alla scuola dei Neo-

(1) I risultati che esso diede sono compendiati nella già citata *Theoretic Arithmetic* di T. Taylor (London, 1816) « containing the substance of all has been written on this subject, by Theo of Smirna, Nicomachus, Iamblichus, and Boetius. Together with some remarquable particulars respecting perfect, amicable and other numbers wich are not to be found in the writings of any ancient or modern mathematicians. Likewise a specimen of the manner in which the Pythagoreans philosophized about number; and a developement of their mystical and theological arithmetic ».

(2) La più antica edizione di quest'opera fu fatta a Parigi nel 1538; ad essa segue quella dell'Ast (Lipsia, 1817); l'ultima e migliore uscì nel 1866 per cura dell'Hoche. Cfr. Th. H. Martin, *Chapitres IX et XX du Livre second de l'Introduction Arithmétique de Nicomaque de Gérase* (Ann. delle Sc. mat. e fis., T. VIII, 1857, p. 429-446).

pitagorici, si deduce dal fatto che Pappo lo designa col nome di Νικόμαχος ὁ Πυθαγορικός (1).

Malgrado la fama straordinaria che ebbe l'*Introduzione* (2), sul suo autore non sappiamo se non quel poco che testè riferimmo. Volgendoci quindi all'opera matematica che di lui conosciamo, notiamo essere dessa indirizzata agli studenti in filosofia; essa surrogò tutti gli scritti anteriori, divenne la base dell'insegnamento, ebbe innumerevoli commenti (3) e, grazie alla versione di Boezio, la sua influenza si prolungò per tutto il Medio Evo. Tale enorme successo è ingiustificato: chè, se anche è esagerata l'asserzione di Isidoro di Siviglia che Nicomaco non espone se non i ritrovati aritmetici dei Pitagorici, pure è indubitato che molta parte di quanto egli insegna risale al tempo di Pitagora e di Platone: arrogi che il suo stile, paragonato a quello di Euclide, segna un indiscutibile regresso, che egli sembra privo della cognizione di ciò che s'intende per dimostrazione di un teorema sopra i numeri, giacchè ritiene di avere stabilita una siffatta proposizione appena l'abbia riscontrata vera in qualche caso particolare. Se per giustificare tale modo di procedere antiscientifico valga il considerare che Nicomaco, essendosi proposto soltanto di accendere nell'animo del suo lettore l'amore per l'aritmetica, soppresse le tediose dimostrazioni, e pose in loro vece delle considerazioni filosofiche, altri giudichi; quello che è certo si è, che tal modo di pro-

(1) Pappo ed. Hultsch, p. 84.

(2) Per dimostrare la rinomanza di Nicomaco T. Taylor (op. cit., p. XXXII) e poi il Nesselmann riferirono (*Die Alg. der Griechen*, p. 220) la frase di Luciano « tu calcoli come Nicomaco di Gerasa! » che, sotto aspetto proverbiale, è riferita da Fabricius (*Bibl. graeca*, V, 635). Il Gow ha rintracciato in Luciano (*Philopatris*, 12) quel verso, attribuendovi lo stesso significato laudativo notato dal Taylor e dal Nesselmann (v. *A short history of greek mathematics*, Cambridge 1884, p. 89). Ma secondo P. Tannery (v. *Bull. des Sc. math.*, II série, T. IX, 1885, p. 158-9) il verso citato non è un complimento rivolto ad un calcolatore, ma sibbene un'ironia che non depone a favore di Nicomaco. A noi sembra che, anche ammesso questo, il verso di Luciano attesti la notorietà di cui questi godeva, anche fra i non matematici, nel II sec. dell'E. v.

(3) Ricordiamo fra i chiosatori di Nicomaco, oltre a Proclo e Giamblico, del quale ci occuperemo presto, Apulejo di Madaura, Giovanni d'Alessandria (*Johannes Philoponus in Nicomachi Introductionem Arithmeticam*, ed. Hoche, Lipsiae 1864 e Berolini 1867) e Asclepio da Tralle (inedito; v. Tannery in *Notices et extraits* etc. T. XXXII, 1886, 1.ère partie, p. 122).

cedere forse poteva stimolare allo studio dell'aritmetica, ma non avrà somministrato ad alcuno le forze e gli ordigni necessari per risolvere un problema o per compiere una investigazione originale.

32. Premesse queste osservazioni generali sull'indole della *Introduzione aritmetica,* la percorreremo rilevando ciò che di più saliente vi incontreremo. Saltiamo a piè pari i primi sei capitoli perchè costituiscono un preludio esclusivamente filosofico, ed osserviamo che nel recinto prettamente aritmetico si penetra mediante la definizione di numero. Segue la distinzione de' numeri in pari (ἄρτιοι) e dispari (περιττοί), seguìta dalla proposizione " ogni numero è la semisomma dei due ad esso contigui $\left(a = \frac{\overline{a-1} + \overline{a+1}}{2}\right)$, eccetto l'unità, che è eguale alla metà del numero che la segue ", si incontrano le definizioni dei numeri ἀρτιάκις ἄρτιοι, ἀρτιοπέριττοι e περισσάρτιοι, relative ai numeri delle tre forme: $2^n, 2(2m+1)$ e $2^{n+1}(2m+1)$; sono i nomi stessi che si incontrano negli *Elementi* di Euclide (Lib. VII, def. 8-10), ma con significati un po' differenti e scelti con criteri che segnano un indiscutibile progresso sul metodo dell' Alessandrino. Con i numeri della terza delle suddette categorie si formi il seguente quadro:

$$\begin{array}{lllll} 2^2 \times 1 & , & 2^2 \times 3 & , \cdots & 2^2(2m+1) \\ 2^3 \times 1 & , & 2^3 \times 3 & , \cdots & 2^3(2m+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^{n+1} \times 1 & , & 2^{n+1} \times 3 & , \cdots & 2^{n+1}(2m+1) \end{array}$$

e si vedrà tosto che (come osserva il Geraseno) " in ogni orizzontale la somma dei due estremi è eguale alla somma dei medi se m è pari od al doppio del termine medio se m è dispari; invece in ogni verticale il prodotto dei due estremi è eguale al prodotto dei termini medi se n è pari od al quadrato del termine medio se n è dispari ".

I cap. 11-13 del I libro della *Introduzione* sono dedicati ai numeri primi ed ai numeri composti: qui Nicomaco, trascinato dai principî della scuola a cui era affigliato e precisamente da quello secondo cui ogni collezione di cose doveva ammettere una distinzione in tre categorie, divide tutti i numeri in primi assoluti, composti e primi relativi, violando così la legge che deve essere rispettata in qualsiasi classificazione, che ogni elemento di una classe non entri in alcuna delle altre. Nell'ultimo dei citati capitoli incontriamo lo staccio di Eratostene; già lo descrivemmo (L. II, n. 51) onde è

superfluo riparlarne (1); solo osserviamo che Nicomaco dà torto ad Euclide per avere posto il 2 fra i numeri primi, fondando la sua accusa sul puerile pretesto che la tavola di numeri primi costruiti da Eratostene si apre col numero 3!

Nei cap. 14-16 Nicomaco fa conoscere la sostanza di quanto Euclide lasciò scritto intorno ai numeri esuberanti, perfetti e deficienti; applicando poi il metodo di Euclide (v. L. II, n. 18) egli trova essere 6, 28, 496 e 8128 i primi quattro numeri perfetti ed osserva quanto raramente numeri siffatti s'incontrino nella serie naturale; infatti se ne trova uno nella prima decina, uno nel primo centinaio, uno nel primo migliaio ed uno nella prima miriade. Osserva che le ultime cifre di quei quattro numeri sono alternativamente 6 e 8; ed aggiunge che il procedimento euclideo può applicarsi indefinitamente (almeno teoricamente, chè in pratica la complicazione dei calcoli li rende ineseguibili), asserzione questa di cui nemmeno oggi siamo in grado di misurare l'esattezza, perchè è ancora ignoto se esistano infiniti numeri primi della forma $2^n - 1$.

Il cap. 17 si apre colle parole:

Dopo di avere esposto nelle pagine precedenti le nozioni preliminari relative alle grandezze prese separatamente, passo ora allo studio delle relazioni scambievoli fra le grandezze. La relazione fra una grandezza ed un'altra è in generale di due specie, cioè eguaglianza e diseguaglianza. Sull'eguaglianza non c'è nulla a dire, perchè di due grandezze eguali nessuna può avere qualche particolarità che non sia posseduta anche dall'altra. Due facce invece ha la diseguaglianza, cioè la grandezza maggiore e la minore. A norma delle varie specie di dipendenza reciproca, tanto la grandezza maggiore quanto la minore hanno dei nomi speciali. Ed in realtà si sogliono distinguere cinque sorta di relazioni.

Cioè può accadere: I (cap. 18) che una delle grandezze date sia divisibile per l'altra; allora la maggiore è un *multiplo* (πολλαπάσιος) della minore e questa invece un *summultiplo* (ὑποπολλαπλάσιος) di quello; II (cap. 19) che la grandezza maggiore stia alla minore nel rapporto $\frac{p+1}{p}$ ed allora la prima dicesi ἐπιμόριος (lat. *superparticularis*) e la seconda ὑπεπιμόριος (lat. *subsuperparticularis*); al rapporto fra le due grandezze si dànno poi nomi speciali a norma del valore di p, nomi caduti in dimenticanza e che non vale la pena di richiamare;

(1) Cfr. anche Boezio ed. Friedlein, p. 33.

III (cap. 20 e 21) che la grandezza maggiore (detta ἐπιμερής, lat. *superpartiens*) stia alla minore (detta ὑπεπιμερής, lat. *subsuperpartiens*) nel rapporto $\frac{2m+n}{m+n}$; anche qui il rapporto $\frac{2m+n}{m+n}$ prende nomi speciali in corrispondenza a valori particolari del rapporto $\frac{m}{n}$; IV (cap. 22) che la grandezza più grande stia alla più piccola come $mn+1$ sta a n; quella porta in tal caso il nome di πολλαπλασιεπιμόριος, questa invece il nome di ὑποπολλαπλασιεπιμόριος; V (cap. 23) che finalmente il rapporto fra le grandezze considerate sia $\frac{p(m+n)+m}{m+n}$.

Per quanto queste distinzioni siano poco importanti — sicchè, assieme alla conseguente nomenclatura, vennero, in processo di tempo eliminate dall'aritmetica — pure era indispensabile farne cenno perchè rimasero classiche in tutto l'Occidente sino a che venne importata in Europa l'aritmetica degli Indiani e degli Arabi. Nicomaco chiude le esposte classificazioni facendo notare che " dall'eguaglianza, come fonte unica e primordiale, scaturiscono tutte le varie forme di diseguaglianza e le loro differenze ".

33. Maggiore importanza possiede il II Libro di Nicomaco, ove sono sparse molte considerazioni relative a serie i cui termini si seguono secondo una determinata legge.

Premesse alcune osservazioni atte a cementare questo Libro col precedente, Nicomaco osserva (cap. 3) che se, partendo dalla progressione geometrica

$$u_n = r^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

si costruisce la serie

$$u'_n = r^{n-1} + r^n \ (n = 1, 2, \ldots),$$

il rapporto di un termine della seconda al termine omologo della prima è della specie di quelli a cui è consacrato il cap. 19 del Libro I; ed infatti

$$\frac{u'_{n+1}}{u_n} = \frac{r+1}{r}.$$

La stessa proprietà ha luogo se si parte da una progressione geometrica il cui primo termine sia diverso da 1; in particolare (cap. 4) se si opera sulla serie u'_n come si operò sopra u_n. Così facendo e proseguendo nello stesso modo si ottiene la seguente serie di serie:

$$\begin{array}{llllll}
1 & r & r^2 & r^3 & \ldots, & r^n \ldots \\
 & r+1 & r^2+r & r^3+r^2 & , \ldots, & r^n + r^{n-1} \ldots \\
 & & r^2+2r+1\,. & r^3+2r^2+r & , \ldots, & r^n + 2r^{n-1} + r^{n-2} \ldots \\
 & & & r^3+3r^2+3r+1 & , \ldots, & r^n + 3r^{n-1} + 3r^{n-2} + r^{n-3}, \ldots \\
 & & & & & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

i cui primi termini sono le potenze successive di $r+1$. Va notato che il procedimento che serve a ottenere questa successione di numeri è lo stesso che, applicato alla serie 1, 2, 3, ..., dà il " triangolo aritmetico " di Pascal (1).

Alla teoria dei numeri poligonali Nicomaco arriva osservando come qualunque numero sia somma di alcuni termini della progressione geometrica (di ragione 1)

$$1, 1, 1, \ldots \text{ (2)};$$

partendo invece dalla progressione aritmetica

$$1, 2, 3, \ldots$$

e sommandone alcuni primi termini Nicomaco ottiene un numero triangolare. La stessa operazione eseguita sulla serie

$$1, 3, 5, \ldots$$

dà un numero quadrato. Queste cose erano probabilmente già note a Pitagora. Estendendo la portata del metodo or ora usato, applicandolo cioè alla progressione

$$1, 4, 7, \ldots,$$

---

(1) V. il *Traité du triangle arithmétique*, con cui si apre il T. V (La Haye, 1779) delle *Oeuvres de Blaise Pascal.*

(2) A questa osservaziono si collega il passo di Nicomaco che riferimmo nel n. 5 (in nota).

Nicomaco ottiene un numero che chiama pentagonale per un' ovvia ragione geometrica. Similmente pei numeri esagonali, ettagonali ecc. In generale se si considera la progressione

$$1 \ , \ 1+d \ , \ 1+2d \ , \ \ldots \ , \ 1+(n-1)d \ , \ \ldots$$

si arriva al numero poligonale ($n.^{mo}$ e di $d+2$ lati)

$$\frac{2+(n-1)d}{2}n.$$

già considerato da Ipsicle a quanto afferma Diofanto. Questi numeri sono legati da molte relazioni, di cui Nicomaco dà parziale notizia; egli osserva ad esempio che „ ogni numero quadrato è somma di due triangolari „, (1) e più generalmente che " l'$n.^{mo}$ numero poligonale di $d+2$ lati è eguale all'$n.^{mo}$ numero poligonale di $d+1$ lati aumentato dell'$(n-1)^{mo}$ numero triangolare „ (2).

Le riferite definizioni ed i relativi teoremi ebbero senza dubbio la loro radice in considerazioni geometriche; analoghi sono i fondamenti della considerazione dei *numeri solidi*. Tra i quali notiamo i *piramidali* a base qualunque, ognuno dei quali è la somma di un certo numero di numeri poligonali simili; così la somma dei primi n numeri poligonali di $d+2$ lati è il numero

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left\{ k + d\frac{k(k-1)}{2} \right\} = \frac{n(n+1)}{2} + d\frac{(n-1)n(n+1)}{6}. \quad (3)$$

---

(1) Infatti

$$n^2 = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) Infatti

$$\frac{2+(n-1)d}{2}n = \frac{2+(n-1)(d-1)}{2}n + \frac{n(n-1)}{2}.$$

(3) Questa espressione non è data da Nicomaco. Proseguendo la costruzione indicata si arriva a nuovi numeri, cioè ai seguenti:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \frac{k(k+1)}{2} + d\frac{(k-1)k(k+1)}{6} \right\} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + d\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4}.$$

Spingendosi ancor più innanzi sulla stessa via si ottengono dei numeri iperpiramidali la cui espressione generale è:

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!} + d\frac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+p-2)}{(p+1)!}$$

Togliendo da questo il numero 1 nasce un numero è poligonale troncato (κόλουρος); togliendo anche il seguente numero poligonale il numero è bitroncato (δικόλουρος), ecc.; tutti questi numeri si possono considerare come differenza tra due numeri piramidali a basi simili.

Dalla considerazione dei fattori di un numero provengono altri enti aritmetici considerati da Nicomaco; precisamente i *cubi*, i *travi*, (δοκίδες o στηλίδες), i *tetti* (πλινθίδες) ed i *cunei* (σφηνίσκοι) (1); sono numeri delle seguenti forme:

$$m^3 \quad , \quad m^2(m+n) \quad , \quad m^2(m-n) \quad , \quad m \times n \times p;$$

in particolare un numero del tipo $m^2(m+1)$ è un *parallelepipedo*. Similmente fra i numeri piani emergono i quadrati e gli ἑτερομήκεις (sono questi numeri della forma $m\ (m+1)$), i quali sono legati ai numeri triangolari da notevoli relazioni su cui Nicomaco si estende con visibile compiacenza e che devono venir qui riferite. Posto

$$q_n = n^2 \quad , \quad e_n = n(n+1) \quad , \quad t_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

tali relazioni si possono esprimere come segue:

$$\frac{e_n}{q_n} = \frac{n+1}{n} \quad , \quad e_n - q_n = n \quad , \quad \frac{q_n}{e_{n-1}} = \frac{n}{n-1} \quad , \quad \frac{q_n}{e_n} = \frac{e_n}{q_{n+1}}$$

$$q_{n+1} - q_n = 2n+1 \quad , \quad e_{n+1} - e_n = 2n+2$$

$$q_n + q_{n+1} + 2e_n = q_{2n+1} \quad , \quad e_n + e_{n+1} + 2q_{n+1} = q_{2n+2}$$

$$q_n + e_n = t_{2n} \quad , \quad q_{n+1} + e_n = t_{2n+1} \, .$$

Nicomaco avverte ancora che " fra due quadrati consecutivi cade sempre uno ed un solo eteromeco „ (è la media geometrica di quelli), e che " se q è un quadrato $q \pm \sqrt{q}$ sono due eteromechi „. Sopra tutti questi teoremi eccelle quello che insegna potersi " qualunque cubo ottenere come somma di un certo numero di termini di una progressione aritmetica „; tale notevole fatto è espresso dalla seguente identità:

$$(n^2+n+1) + (n^2+n+3) + \ldots + (n^2+3n+1) = (n+1)^3,$$

(1) Questi nomi furono già da noi incontrati nelle *Definizioni* attribuite ad Erone. (L. III, n. 70).

di cui Nicomaco conosce almeno i più semplici casi particolari. Addizionando tutte quelle che nascono da essa facendo $n=0,1,...,r-1$ si conclude

$$1^3+2^3+...+r^3=\left[\frac{r(r+1)}{2}\right]^2;$$

ora, benchè questa formola non si trovi nè in Nicomeco nè in altra opera greca, pure è probabile sia stata osservata da qualche compatriota di Euclide, dal momento che i Romani la conoscevano (1).

Aggiungiamo che fra i numeri piani Nicomaco considera ancora i *circolari* e fra i solidi gli *sferici;* i primi sono quadrati di numeri che terminano con una delle cifre $1,5,6$; i secondi sono i cubi dei medesimi; questi numeri godono essi pure la proprietà di avere come ultime cifre $1,5$ o 6.

L'ultimo argomento trattato da Nicomaco è la teoria delle proporzioni, che, secondo lui, è necessaria per lo studio " delle scienze naturali, della musica, della sferica, della planimetria ed in particolare per lo studio degli antichi matematici ". A questa parte dell'opera che studiamo si deve se la teoria delle proporzioni riprende nella matematica il suo posto naturale, cessando di essere un capitolo della geometria. A tale teoria sono dedicati gli ultimi capitoli del II Libro dell'*Introduzione*. Ivi si legge che, date tre o quattro grandezze, se passano fra di esse rapporti di eguaglianza, essi si comportano a coppie ἀνὰ λόγον, perciò l'eguaglianza di due rapporti si chiama ἀναλογία. Se le grandezze considerate sono tre, la proporzione dicesi *continua* (ἀναλογία συνημμένη oppure συνηχής), se sono quattro *separata* (διεζευγμένη).

Quattro grandezze a,b,c,d sono in proporzione aritmetica quando $a-b=c-d$; lo sono tre a,b,c se $a-b=b-c$, nel quale caso è $b^2-ac=(a-b)^2=(b-c)^2$.

Si ha invece una proporzione geometrica se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ oppure se $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$; in quest'ultimo caso, detto ρ il valore comune dei due rapporti considerati, si ha

$$a-b=(\rho-1)b \quad , \quad b-c=(\rho-1)c,$$

---

(1) Cantor, *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed.), p. 519-20.

onde

$$(a-b)-(b-c)=(\rho-1)(b-c).$$

Finalmente si ha una proporzione detta *sub-contraria* (ὑπεναντία) o (forse dietro proposta di Filolao) *armonica* se $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$; in tal caso si ha $2ac=b(a+c)$, e $\frac{a}{b}>\frac{b}{c}$, mentre, se $a>b>c$ fossero tre numeri in proporzione aritmetica, si avrebbe $\frac{a}{b}<\frac{b}{c}$ (1).

Sorvolando sulle proprietà musicali della proporzione armonica, svolte nel cap. 26 dell' *Introduzione*, notiamo che ivi Nicomaco riferisce l' osservazione di Filolao, che i numeri degli elementi (facce, spigoli, vertici) di un cubo formano una proporzione armonica, cioè la seguente $\frac{12-8}{8-6}=\frac{12}{6}$. Il nostro autore insegna poi che fra " due numeri entrambi pari od entrambi dispari esiste una media aritmetica, una media geometrica ed una media armonica ", ma dimentica di dire che per la presenza della seconda il prodotto dei due numeri dati dev' essere un quadrato, e che anche la terza (sempre, ben inteso, in numeri interi) non esiste sempre.

---

(1) Infatti se

$$b=c+\delta\ ,\quad \text{e}\quad a=b+\delta=c+2\delta$$

si ha

$$\frac{a}{b}=1+\frac{\delta}{c+\delta}\quad ,\quad \frac{b}{c}=1+\frac{\delta}{c}$$

onde

$$\frac{a}{b}<\frac{b}{c}.$$

Posto

$$a=\frac{1}{a_1}\quad ,\quad b=\frac{1}{b_1}\quad ,\quad c=\frac{1}{a_1},$$

a_1, b_1 e c_1 saranno in proporzione armonica e la relazione precedente diverrà

$$\frac{b_1}{c_1}<\frac{a_1}{b_1}$$

cioè

$$\frac{a_1}{b_1}>\frac{b_1}{c_1}\quad \text{c.d.d.}$$

Oltre alle tre proporzioni dianzi definite fra tre numeri a, b, c ed alle tre ad esse contrarie

$$\frac{a}{c} = \frac{b-c}{a-b} \quad , \quad \frac{b}{c} = \frac{b-c}{a-b} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{b-c}{a-b} \, ,$$

— le quali furono considerate da Archita ed Ippaso e divulgate da Eudosso — posteriormente ad Eratostene, altre quattro vennero introdotte (per attestazione di Giamblico) dai Pitagorici Mionide (1) ed Eufranore; sono le seguenti:

$$\frac{a}{c} = \frac{a-c}{b-c} \quad , \quad \frac{a}{c} = \frac{a-c}{a-b} \quad , \quad \frac{b}{c} = \frac{a-c}{b-c} \quad , \quad \frac{b}{c} = \frac{a-c}{a-b} \, .$$

Le tre ultime abbiamo già incontrate in Pappo (cfr. L. IV, n. 9); ma, mentre questi le designa ordinatamente come proporzioni *nona, decima* e *settima*, Nicomaco le chiama successivamente *ottava, nona* e *decima*. Osserviamo finalmente che Nicomaco fa cenno della proporzione

$$a : \frac{a+b}{2} :: \frac{2ab}{a+b} : b \, ,$$

che egli, al pari di Pitagora — che trasportolla da Babilonia (cfr. L. I, n. 21) — considerava come dotata della massima perfezione.

Tali sono i concetti ed i teoremi che agli occhi nostri presentano maggiore valore fra quelli che s' incontrano nell' *Introduzione* di Nicomaco. Se non sono così numerosi ed originali da indurre a collocare il suo autore in prima linea fra le personalità cospicue che presenta la matematica greca, pure bastano a conferirgli un posto onorevole: tanto più che egli è il primo scrittore a noi noto di aritmetica pura e che i suoi precursori andarono dimenticati ed i suoi successori gli sono (come vedremo) inferiori.

Due cose vanno rilevate prima di lasciare questo matematico.

La prima si è che, oltre ad un lavoro sulla *Musica* che già citammo (n. 30), oltre a un' *Introduzione alla geometria,* ricordata nell'opera che testè analizzammo, venne a Nicomaco attribuito quello

(1) Adottiamo (come fa il Pistelli nella sua edizione di Giamblico, p. 116) la lezione πρί τε Μυωνίδην proposta dal Tannery (*Pour l'hist. de la science hellène.* p. 381) in luogo della περὶ Τεμνωνίδην suggerita dal Tennulio.

scritto, da noi già citato, intitolato Θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς che F. Ast fece stampare a Lipsia nel 1817; ora, benchè sia probabile che Nicomaco abbia composto un lavoro di tale natura, pure quello che ci sta innanzi è piuttosto una collezione di estratti di Nicomaco, di Anatolio, vescovo di Laodicea, e di altri (1).

La seconda è (2) che uno scrittore del Sec. XII., O' Creat, il quale attingeva a fonti orientali, parla di una " regula Nichomachi „ per elevare a quadrato un numero di una sola cifra. Eccola: Se a è il numero dato, si calcoli $d = 10 - a$, sarà allora

$$a^2 = 10(a - d) + d^2 \text{ ».}$$

Così il calcolo di a^2 è ridotto a quello di d^2, il quale è più facile quando $d < a$. L'origine di tale regola e del nome che porta sta indubbiamente (3) nel teorema seguente dato da Nicomaco: " se n è la media aritmetica fra m e p, si ha

$$mp = n^2 - \left(\frac{m-p}{2}\right)^2 \text{ »;}$$

ed invero, facendo in questa

$$m = a + d = 10 \quad , \quad n = a \quad , \quad p = a - d$$

si ottiene

$$10(a - d) = a^2 - d^2 \quad \text{ossia} \quad a^2 = 10(a - d) + d^2,$$

conformemente alla regola riferita.

Teone da Smirne.

34. Il secondo degli scrittori di aritmetica dei quali ci dobbiamo occupare è quel mediocre compilatore a cui già attingemmo notizie intorno alle idee astronomiche di Platone (L. III, n. 11) e di cui

(1) Questo giudizio, pronunciato dal De Morgan mezzo secolo fa (*Arithmetical books* etc. London 1847, p. 88), è oggi considerato in generale per conforme al vero.

(2) Cfr. Cantor, *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed. 1894) p. 404.

(3) Congettura attendibilissima di P. Tannery: v. *Bull. des Sciences mathém.*, 2.ª série T. VIII, 1884, p. 291.

riferimmo altrove alcune osservazioni su le figure e le proporzioni (L. IV, n. 5): cioè Teone da Smirne. La sezione aritmetica della sua *Esposizione delle cognizioni matematiche utili per la lettura di Platone* è una semplice raccolta di proposizioni, accatastate senza criterio e semplicemente verificate sopra esempî.

Dopo una introduzione, sull' ordine in cui si devono studiare le matematiche, Teone tratta successivamente: dell' unità e della monade; del numero pari e del numero dispari; del numero primo o indecomposto e del numero composto; delle varie specie di numeri pari; dei numeri quadrati, eteromechi, parallelogrammi e promechi (1); dei numeri triangolari e dei poligonali; dei numeri piramidali; dei numeri laterali e diametrali. Gli intenti prettamente matematici che egli si propose raggiungere sono: di far conoscere i varî concetti secondo cui si classificarono i numeri della serie naturale, di stabilire uno o più modi di generazione per ciascuna classe e di mettere in chiaro le relazioni che passano fra numeri della stessa classe o di classi differenti. Sono, in ultima analisi, gli stessi che si è proposto ed ha raggiunto Nicomaco; per ciò e per la coincidenza sostanziale fra questo e lo Smirneo, è superfluo dilungarci in una analisi esauriente dell' opera che ora ci sta sott' occhio: basterà segnalare in essa quanto non si trova nell' *Introduzione all' aritmetica.*

Alcune osservazioni di Teone sono estremamente semplici; tali sono le seguenti: i numeri della serie naturale ed i loro quadrati sono alternativamente pari e dispari, ma gli eteromechi sono invece tutti pari; nella serie $1, a, a^2, a^3, a^4 \ldots$ sono quadrati i numeri 1°, 3°, 5°, ..., sono cubi il 1°, 4°, 7°, ... e così via; la media proporzionale fra due quadrati consecutivi è un eteromeco, ma la media geometrica fra due eteromechi consecutivi non è mai un quadrato. Maggior valore ha la proposizione: " Ogni numero quadrato è divisibile per 3 o per 4 o lo diviene se sia diminuito di 1 " (2); onde non vi è alcun quadrato della forma $3h+2$,

(1) Secondo il Dupuis il numero promeco sarebbe della forma $a(a+2)$, intermedio fra l'eteromeco $a(a+1)$ ed il parallelogramma $a(a+b)$. Secondo Tannery invece (*Bull. des Sc. math.*, 2.e Série, T. XVII, 1893, p. 283) promeco e parallelogramma sarebbero nomi differenti dati da autori diversi ad ogni numero della forma $a(a+b)$.

(2) *Teone Smirneo ed. Dupuis*, p. 60.

$4h+2, 4h+3$. Il teorema riferito può anche enunciarsi dicendo che sono contemporaneamente interi $\frac{m^2}{3}$ e $\frac{m^2}{4}$, oppure $\frac{m^2}{3}$ e $\frac{m^2-1}{4}$, oppure $\frac{m^2-1}{3}$ e $\frac{m^2}{4}$, oppure finalmente $\frac{m^2-1}{3}$ e $\frac{m^2-1}{4}$. Teone non dimostra nessuna di queste varie forme della riferita proposizione; tuttavia è certo che ai suoi tempi erasi in grado di congegnare il seguente semplicissimo ragionamento per stabilirla. Qualunque numero (m) essendo di una delle forme seguenti:

$$6k \quad , \quad 6k \pm 1 \quad , \quad 6k \pm 2 \quad , \quad 6k \pm 3 ,$$

ogni quadrato (m^2) è di una delle seguenti forme:

$$36k^2 \quad , \quad 36k^2 \pm 12k + 1 \quad , \quad 36k^2 \pm 24k + 4 \quad , \quad 36k^2 \pm 36k + 9 ;$$

per quelli del primo tipo sono interi tanto $\frac{m^2}{3}$ quanto $\frac{m^2}{4}$, mentre per quelli del secondo lo sono $\frac{m^2-1}{3}$ e $\frac{m^2-1}{4}$; per quelli del terzo sono invece interi $\frac{m^2}{4}$ e $\frac{m^2-1}{3}$, e finalmente per quelli del quarto sono interi $\frac{m^2}{3}$ e $\frac{m^2-1}{4}$: come appunto erasi enunciato. Quei quadrati divisi per 3 o 4 danno per resti 0 o 1, onde nessuno ha la forma $3h+2, 4h+2, 4h+3$; pure d'accordo con una proposizione precedente.

35. Ancora più rilevante è la considerazione esposta da Teone di due serie illimitate di numeri aventi fra loro la relazione seguente: il quadrato di un termine qualunque di una di esse differisce per una unità, positiva o negativa, dal doppio del quadrato del termine omologo dell'altra serie; i primi termini di entrambe valgono 1. Gli elementi delle serie considerate chiamansi risp. *numeri laterali* e *numeri diametrali* (1); indicando con

---

(1) *Teone Smirneo ed. Dupuis*, p. 70. Cfr. anche il già citato articolo di F. Hultsch *Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonelen von Quadraten* (Bibl. math., 3.ª Serie, T. I, 1901, p. 8-12).

$$l_1 = 1 \quad , \quad l_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad l_n \quad , \quad \dots$$

i primi e con

$$d_1 = 1 \quad , \quad d_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad d_n \quad , \quad \dots$$

i secondi, Teone insegna per costruirli un metodo che si esprime oggi mediante le relazioni seguenti:

$$(1) \qquad l_n = l_{n-1} + d_{n-1} \quad , \quad d_n = 2l_{n-1} + d_{n-1} \, .$$

Applicando la prima per $n = 2$, si ottiene $l_2 = 1 + 1 = 2$, onde la seconda di $d_2 = 2 . 1 + 1 = 3$; ritornando alla prima si cava $l_3 = = 2 + 3 = 5$, onde la seconda porge $d_3 = 2 . 2 + 3 = 7$; così proseguendo si ottengono le due seguenti serie illimitate:

numeri laterali: 1 , 2 , 5 , 12 , 29 , ...

numeri diametrali: 1 , 3 , 7 , 17 , 41 , ...

Si noti ora che le (1) danno

$$d_n^2 - 2l_n^2 = (-1)\left(d_{n-1}^2 - 2l_{n-1}^2\right);$$

e siccome

$$d_1^2 - 2l_1^2 = -1,$$

si conclude

$$(2) \qquad d_n^2 - 2l_n^2 = (-1)^n \, .$$

che esprime algebricamente la relazione enunciata più sopra fra due numeri omologhi delle due serie. Notisi che dalla relazione (2) si trae

$$\sum_{n=1}^{n=2m} \left(d_n^2 - 2l_n^2\right) = 0 \, ,$$

o, più esplicitamente,

$$(3) \qquad d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_{2m}^2 = 2\left(l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_{2m}^2\right).$$

Per mostrare come i numeri laterali o diametrali non siano oggetto di semplice curiosità, consideriamo le due equazioni indeterminate (di Pell)

$$2x^2 + 1 = y^2 \quad , \quad 2\xi^2 - 1 = \eta^2;$$

un semplice calcolo prova che, se

$$x = m \quad , \quad y = n$$

è una soluzione della prima,

$$\xi = m + n \quad , \quad \eta = 2m + n$$

sarà una soluzione della seconda; e viceversa che se

$$\xi = \mu \quad , \quad \eta = \nu$$

è una soluzione della seconda

$$x = \mu + \nu \quad , \quad y = 2\mu + \nu$$

sarà una soluzione della prima. Della seconda $1, 1$ è una soluzione. Ora, se si parte da questa coppia di numeri si otterrà la coppia $2, 3$ come soddisfacente la prima equazione, quindi la coppia $5, 7$ come soluzione della seconda; e poi la coppia $12, 17$ come soluzione della prima e così via illimitatamente; ora tutte queste coppie altro non sono che paia di elementi omologhi nelle serie dei numeri laterali e diametrali.

Non basta. Si sviluppi $\sqrt{2}$ in frazione continua; si otterrà:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 +} \frac{1}{2 +} \frac{1}{2 + \dots} \quad ;$$

le ridotte successive sono evidentemente

$$\frac{1}{1} \, , \; \frac{3}{2} \, , \; \frac{7}{5} \, , \; \frac{17}{12} \, , \; \dots \, ,$$

onde i loro numeratori costituiscono le serie

$$1 \; , \; 3 \; , \; 7 \; , \; 17 \; , \; \dots$$

dei numeri diametrali, mentre i denominatori formano le serie

$$1 \; , \; 2 \; , \; 5 \; , \; 12 \; , \; \dots$$

dei numeri laterali.

Queste applicazioni delle due serie considerate provano quanto queste siano importanti; e mostrano che Teone Smirneo, anche se non avesse fatto altro che serbarne notizia, avrebbe ben meritato della scienza (1).

Giamblico da Calcide.

36. Alla scuola dei Neopitagorici, di cui furono membri Nicomaco e Teone Smirneo, fa riscontro quella dei Neoplatonici, di cui fa mestieri che ora segnaliamo i contributi dati all' aritmetica.

Coloro a cui sono specialmente dovuti sono due discepoli di Porfirio (v. L. IV, n. 25), cioè Anatolio d' Alessandria, vescovo di Laodicea nella seconda metà del III secolo dell' E. v., ed il suo scolaro Giamblico. Intorno al primo non spenderemo quì altre parole, oltre alle poche che incidentalmente già gli dedicammo (v. specialmente L. III, n. 70), ma il secondo è degno di ottenere nella nostra storia un posto non inferiore a quello che ebbe Teone Smirneo.

Giamblico nacque a Calcide, città della Celesiria (Asia Minore); in qual epoca non si sa con certezza, ma probabilmente nella seconda metà del III secolo dell' E. v. Appartenne a una famiglia ricca e considerevole, studiò a Roma sotto Porfirio ed Anatolio; ritornato in Siria fondò una scuola, destando ne' suoi ascoltatori siffatta ammirazione che essi solevano chiamarlo *divino*. Di lui si conoscono uno scritto intorno alla *Caldea* ed un' opera di maggior lena dal titolo *Collezione delle dottrine pitagoriche* (2).

Constava questa di dieci parti intitolate risp.: I. Vita di Pitagora. II. Introduzione filosofica. III. Introduzione matematica. IV. Commento a Nicomaco. V. Teorie fisiche. VI. Teorie etiche. VII. Teorie teologico-aritmetiche. VIII. Musica. IX. Geometria. X. Sferica. Rimangono le sezioni I, II, III, IV e VII; la prima sa-

---

(1) Delle relazioni (1) Paul Bergh ha indicata una rappresentazione geometrica (*Seiten- und Diametralzahlen bei den Griechen*, Zeitsch. f. Math. u. Phys., T. XXXI, 1886, Hist.-lit. Abth., p. 135; cfr. Cantor, *Vorlesungen*, T. I, 2.ª col., p. 408) che M. Cantor ha qualificato di « überaus geistreiche Vermuthung »; non la riferiamo perchè tutto l'edificio eretto dal dotto norvegese poggia sull'ardita ipotesi che esista un triangolo contemporaneamente equilatero e rettangolo.

(2) A lui, come a Nicomaco, vennero a torto attribuiti i *Theologumena arithmetica* (v. n. 33).

rebbe di gran valore per la conoscenza del Pitagorismo, ove si potessero accettare come verità le informazioni ivi date, ma ciò non è, come già sappiamo; un pregio indiscutibile possiedono invece le parti seconda e terza, ciò che spiega le edizioni che anche recentemente se ne fecero (1).

37. Crediamo superfluo il seguire passo passo Giamblico nell'atto in cui chiosa (anzi spesso semplicemente parafrasa) Nicomaco; riteniamo per converso sufficiente segnalare i cambiamenti e le aggiunte che egli propone a le discipline ed i teoremi del Geraseno.

Rileviamo anzitutto la proposizione " se all'ottuplo di un numero triangolare si aggiunge l'unità si ottiene un quadrato „ (2). Giamblico non ne è l'inventore perchè già Plutarco (40-120 dell'E. v.) la conosceva. A Giamblico appartiene forse il teorema " aggiungendo l'unità al prodotto di un numero per lo stesso aumentato di 2 si ottiene un quadrato „ (3) e l'espressione seguente

$$n^2 = (1 + 2 + ... + n) + \overline{n-1} + (\overline{n-2} + \overline{n-3} + ... + 2 + 1)$$

del teorema di Nicomaco " ogni numero quadrato è la somma di due triangolari „: per tal modo il nostro autore fu condotto all'altra relazione analoga:

$$n(n-1) = (1 + 2 + ... + \overline{n-2}) + \overline{n-1} + n + (\overline{n-2} + \overline{n-3} + ... + 2).$$

Maggior valore avrebbero i complementi dati dal discepolo di Anatolio a quanto Nicomaco (v. n. 31) espose sopra la distribuzione nella serie naturale dei numeri perfetti, se non contenessero delle affermazioni inesatte (4). Ed invero, il Geraseno ha con ragione

(1) *Iamblichi de communi mathematica scientia liber*, ed. Festa (Lipsiae, 1891). *Iamblichi in Nicomachi Arithmeticam introductionem liber*, ed. Pistelli (Lipsiae 1894). Della prima di queste opere esistono molte edizioni anteriori (1668, 1781, 1813, 1815, 1817), ma della seconda non si conosce che quella imperfettissima del Tennulio (1668).

(2) Infatti $8 \frac{n(n+1)}{2} + 1 = (2n+1)^2$.

(3) $n(n+2) + 1 = (n+1)^2$.

(4) V. per ciò che segue: Hultsch, *Erläuterungen zu dem Berichte des Iamblichus über die vollkommenen Zahlen* (Götting. Nachrichten 1895), e una nota al termine delle memoria *Poseidonius über die Grösse und Entfernung der Sonne* (Götting. Abhandlungen, Hist.-Phil. Klasse, Neue Folge, I Bd., 1897).

osservato quanto raramente s'incontrino dei numeri perfetti nella serie naturale dei numeri; Giamblico aggiunge di suo che, come esiste un numero perfetto sia nella prima che nella seconda specie di miriadi, se ne trova anche uno in ciascuna delle seguenti. Orbene, dopo i quattro numeri perfetti noti a Nicomaco (v. n. 31) si conoscono i cinque seguenti:

$$2^{12}(2^{13}-1)=33\ 550\ 336$$
$$2^{16}(2^{17}-1)=8\ 589\ 869\ 056$$
$$2^{18}(2^{19}-1)=137\ 438\ 691\ 328$$
$$2^{30}(2^{31}-1)=2305\ 843\ 008\ 139\ 952\ 128$$
$$2^{60}(2^{61}-1)=2658\ 455\ 991\ 569\ 831\ 744\ 654\ 962\ 615\ 953\ 842\ 176;$$

di essi il primo è $<10000^2$, il secondo e il terzo sono minori di 10000^3, il quarto è inferiore a 10000^5, e l'ultimo è inferiore a 10000^{10}, onde è chiaro che non in ogni intervallo determinato di due termini consecutivi delle serie

$$10000 \quad , \quad 10000^2 \quad , \quad 10000^3 \quad , \quad \ldots$$

si trova uno ed un solo numero perfetto, come credeva l'autore di cui ci occupiamo. — Giamblico osserva poi che il fatto (notato da Nicomaco sui quattro numeri perfetti a lui noti) dell'essere l'ultima cifra di un numero perfetto 6 o 8, sussiste anche pei numeri perfetti seguenti. Per verificarlo si ricordi che l'espressione generale di un numero perfetto euclideo (L. II, n. 18) è $2^n(2^{n+1}-1)$, supposto che $2^{n+1}-1$ sia numero primo; ora l'ultima cifra di 2^n è

$$2 \; , \; 4 \; , \; 8 \text{ o } 6,$$

quindi l'ultima di 2^{n+1} è in corrispondenza

$$4 \; , \; 8 \; , \; 6 \text{ o } 2$$

e l'ultima di $2^{n+1}-1$

$$3 \; , \; 7 \; , \; 5 \text{ o } 1.$$

La terza ipotesi è di escludersi perchè se $2^{n+1}-1$ termina con 5 non è primo, onde le coppie ammissibili come ultime cifre dei due termini del prodotto $2^n(2^{n+1}-1)$ sono:

$$2 , 3 \quad ; \quad 4 , 7 \quad ; \quad 6 , 1,$$

epperò l'ultima cifra del prodotto è 6 o 8. Che poi (contrariamente all'opinione di Boezio (1)) queste cifre non si presentino sempre alternativamente come nel gruppo dei primi quattro numeri perfetti, è dimostrato dalla semplice ispezione dei valori che hanno i nove primi numeri perfetti successivi.

Ci limitiamo a segnalare di passaggio un perfezionamento teorico riferito da Giamblico relativo al sistema delle tetradi apolloniane (2) per arrestarci, finendo, sopra una notevole proposizione di cui egli ha serbata notizia. Eccola: "dati tre numeri consecutivi, il maggiore dei quali sia multiplo di tre, se ne faccia la somma; del numero risultante si addizionino le cifre; si ripeta la stessa operazione sul risultato e così proseguasi finchè ciò è possibile; si finirà per ottenere 6". Questo teorema è evidentemente collegato alla considerazione dei *pitmeni* che trovammo applicata da Apollonio (v. n. 14) e che vedemmo stare a base del metodo di onomatomanzia che S. Ippolito chiama *calcolo pitagorico* (v. n. 20); una traccia di siffatta considerazione in una *Collezione di dottrine pitagoriche* non deve dunque recare meraviglia! Che poi al tempo di Giamblico si fosse in grado di dimostrare quella proposizione, si vede osservando che questa si può stabilire con un ragionamento elementare che ora esporremo, dopo di avere notato che, se nel presentarlo qui ci serviamo di notazioni moderne e di concetti appartenenti all'odierna teoria dei numeri, è soltanto per essere più concisi.

Sia

$$N = n_0 + 10n_1 + 10^2 n_2 + \dots$$

un numero scritto nel sistema decimale; chiamisi $S(N)$ la somma delle sue cifre, $S^{(2)}(N)$ la somma delle cifre di $S(N)$ e così via. Si osservi essere

$$N - S(N) = 9\,(n_1 + 11n_2 + 111n_3 + \dots)$$

e si dedurrà

$$N \equiv S(N) \pmod{9}.$$

Similmente

$$S(N) \equiv S^{(2)}(N) \pmod{9}$$

(1) *Boezio, ed. Friedlein*, p. 42.

(2) Hultsch, *Erläuterungen* etc., p. 6-9 dell'estratto.

e così via. Sia

$$S^{(k-1)}(N) \equiv S^{(k)}(N) \pmod{9}$$

l'ultima possibile di tali relazioni; $S^{(k)}(N)$ sarà un numero $N' \leq 9$.

Addizionando membro a membro tutte le trovate congruenze si conclude:

$$N \equiv N' \pmod{9} \text{ colla condizione } N' \leq 9.$$

Ora, se N è la somma di tre numeri consecutivi di cui il maggiore è divisibile per 3, si può porre

$$N = (3p+1) + (3p+2) + (3p+3) = 9p+6;$$

la congruenza precedente diverrà quindi

$$9p + 6 \equiv N' \pmod{9},$$

ossia

$$N' \equiv 6 \pmod{9} \text{ colla condizione } N' \leq 9.$$

Ma l'unico numero della prima decina divisibile per 6 è il 6 stesso, dunque $N' = 6$, conformemente al teorema di Giamblico (1).

Domnino da Larissa (2).

38. I due libri d'*Introduzione all'aritmetica* di Nicomaco sono caratterizzati agli occhi del matematico dall'abbandono di quell'apparato geometrico di cui si servì Euclide e che venne adoperato anche da coloro che, dopo di lui, coltivarono la scienza del numero. Nel coro di lodi con cui quell'opera venne accolta ed accompagnata nel corso della sua fortunata carriera, una voce stonata è rappresentata da un oscuro trattatello compilato da un certo Domnino (nato a Larissa in Siria), nel quale è predicato coll'esempio il ritorno al metodo euclideo.

(1) Lo stesso ragionamento fatto prova che se dei tre numeri consecutivi considerati fosse il minimo divisibile per 3 si otterrebbe *tre* invece di sei; e se fosse il medio *nove*.

(2) P. Tannery, *Domninos de Larissa* (*Bull. des Sc. Math.*, 2.e Série, T. VIII, 1884, p. 288-298).

Domnino (1) era un condiscepolo di Proclo. Il loro maestro Siriano li trattava da eguali, sicchè alla sua morte si divisero il primato nella scuola di Atene. La loro rivalità, visibile sin da quando viveva Siriano, scoppiò in una polemica aperta, nella quale (se si presta fede a Damascio, citato da Suida) Domnino ebbe la peggio. Fu probabilmente in seguito a tale discussione vivace che Domnino cedette il campo a Proclo e si ritirò, forse a Laodicea di Siria, lasciando in Atene dietro a sè fama di uomo integro e di aritmetico valoroso. Ci resta di lui un *Manuale di introduzione all'aritmetica*, il quale fu fatto conoscere dal Boissonade in uno dei cinque volumi di *Anecdota graeca* da lui pubblicati negli anni 1829-1833; ma egli deve avere composto anche un *Trattato elementare di aritmetica* (Στοιχείωσις ἀριθμητική) del quale si lamenta la perdita.

Nel *Manuale* gli argomenti trattati sono circa gli stessi di cui si occuparono gli scritti discorsi in questo capitolo, in particolare l'*Introduzione* del Geraseno; nei punti in cui (specialmente nelle definizioni) questi si trova in disaccordo con Euclide, è al primo che Domnino dà ragione; aggiungasi che questi esclude ogni figurazione di numeri basati sull'addizione e quindi dà l'ostracismo ai numeri poligonali e piramidali, che sono appunto generati addizionando un certo numero di termini di una serie.

Non fa mestieri arrestarsi più oltre su questo autore; il quale merita un posto nella storia della matematica greca per ciò solo che tentò riporre l'aritmetica su una vera via scientifica; chè, se tale è quella battuta da Euclide, tale non è certamente quella percorsa da Nicomaco, Teone e Giamblico, i quali surrogarono le rigorose dimostrazioni con delle semplici verificazioni, sempre inconcludenti e talora traditrici. Oltre a questo difetto, l'aritmetica, quale si trova (trattata con monotonia desolante) nei citati autori, sembra mancare delle doti che assicurano ad una disciplina un brillante avvenire: se non altro perchè, scambio di applicare le teorie già mature alle soluzioni di nuovi problemi, coloro che la coltivarono si limitarono ad illustrare i concetti che Pitagora aveva stabiliti e tutt'al più ad

(1) Tale nome fu sfigurato in *Domnenus*, *Domnius*, *Dominus*; il che indusse l'Harles ad emettere l'ipotesi (v. *Bibliotheca graeca*, T. V, p. 648) che il citato manuale fosse di Eliodoro Larissa e che quel nome di grafia incerta non fosse un nome proprio, ma sibbene un titolo onorifico (*dominus*).

aggiungere qualche nuovo teorema empirico, a cui dava luogo l'esame reiterato della serie naturale dei numeri. Chi per primo si accorse che, affinchè la scienza del numero potesse soddisfare le giuste aspettative dei matematici, doveva irrobustirsi col provarsi a sciogliere dei problemi non ancora tentati, ci è ignoto; ma quegli in cui tale innovazione è attuata, colui che dimostrò luminosamente l'utilità del novello indirizzo, è l'ultimo grande scienziato di cui dobbiamo occuparci: Diofanto.

V.

Diofanto.

39. I matematici di cui trattammo sino ad ora, nella varietà delle investigazioni che compirono, delle discipline che preferirono, della terra in cui nacquero e delle epoche in cui vissero, hanno una caratteristica comune, quella cioè di non avere lasciato memoria esatta delle circostanze in cui si svolse la loro esistenza. Quando videro la luce ci è per molti ignoto, onde la relativa cronologia deve in gran parte restringersi ad una semplice constatazione — spesso basata soltanto sopra regioni intrinseche — di quale fra essi abbia preceduto gli altri. Che cosa abbiano operato all'infuori dei lavori superstiti, o di cui si è almeno conservato il titolo, non sappiamo; sicchè i loro scritti, in luogo di formare per essi un gruppo di note caratteristiche, compendiano tutto quello che intorno ad essi sappiamo.

A tal sorte comune non si sottrasse che (tacendo di coloro i cui trionfi sono registrati nella storia della filosofia) Archimede, e, non già per la luce di gloria che su di lui proiettano le sue immortali scoperte, ma sibbene per essere vissuto sui gradini di un trono e per essersi trovato tragicamente connesso ad un avvenimento clamoroso, come è l'assedio e l'espugnazione di Siracusa. Per converso al destino comune ai matematici greci non si sottrasse Diofanto (1)

(1) La lezione Diofante, su cui tanto dottamente si discusse (Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra*, T. I, Parma 1797, p. 61; Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, p. 244-245; Heath, *Diophantos of Alexandria*, Cambridge, 1885, p. 1-2), sembra da respingere, dopo che vennero segnalate citazioni ove si trova il nome di Diofanto al nominativo.

d'Alessandria (1), colui che rappresenta nella storia dell'aritmetica una parte somigliante a quella che la sorte affidò ad Euclide in quella della geometria ed a Tolomeo in quella dell'astronomia. Ed invero le notizie sicure che lo concernono si riferiscono in poche linee.

Una la porge egli stesso, quando, nel frammento superstite di un suo scritto *Sui numeri poligonali* cita Ipsicle (2); ora, poichè sappiamo (L. II, n. 30) essere questo geometra di poco posteriore ad Euclide ed Apollonio, otteniamo la data 200 a. C. come limite inferiore per l'esistenza di Diofanto (3). Un limite superiore si otterrebbe ricorrendo a quel passo (cfr. L. III, n. 50) del lessicografo Suida ove è detto che Ipazia commentò un'opera astronomica di Diofanto; ma chi garantisce che si parli ivi dell'aritmetico di cui dobbiamo occuparci e non piuttosto di un astronomo naufragato nel gran mare dell'oblio? Fortunatamente il medesimo intento si raggiunge tenendo conto della citazione di Diofanto " aritmetico " fatta da Teone d'Alessandria (4), segnalata da Pietro Ramo (5) e più tardi rintracciata da Nesselmann (6); ora, se si ricorda che il citato commentatore fiorì sotto Teodosio il Grande, si conclude che Diofanto visse certo prima del 350 dell'E. v.; è quindi inaccettabile l'opinione di A. de Morgan (7) che egli appartenga al VII secolo dell'E. v.; per converso a ragione il Cossali (8) scrisse:

---

(1) Gli antichi lo indicavano come 'Αλεξανδρεύς per indicare che in Alessandria nacque od almeno visse a lungo. Altri personaggi di nome Diofanto sono ricordati dal Cossali nel *loc. cit.* Che quello che ci interessa abbia appartenuto al Museo (Hoche, *Hypathia die Tochter Theons*, Philologus, T. XV, 1860, p. 435-474) è opinione prodotta da un'induzione naturalissima, non da dati positivi.

(2) *Diophanti Alexandrini Opera omnia*, ed. Tannery, T. I (Lipsiae, 1893). pp. 470-472.

(3) Il Nesselmann (op. cit., p. 246-7), fondandosi sul fatto che un teorema sui numeri poligonali trovasi in Nicomaco sotto forma meno perfetta che in Diofanto, concluse essere Ipsicle posteriore a Nicomaco. Ma tale argomentazione non può essere giudicata come conclusiva.

(4) *Teone ed. Halma*, T. I, p. 111. Cfr. *Diophanti Alex. Opera omnia*, T. II (Lipsiae 1895) p. 35.

(5) *Scholae mathem.*, p. 37.

(6) Op. cit., pag. 249-250.

(7) *Aritmetical Books* etc. (London 1847).

(8) Op. cit., T. I, p. 66.

" penso che il filosofico riserbo esigga di contentarci a dire, che verisimilmente (Diofanto) fiorì nel corso dei secoli da 200 anni prima a 400 dopo l'epoca cristiana „.

Che però Diofanto abbia vissuto in epoca più prossima al limite superiore trovato che all'inferiore emerge dal non essere egli citato nè da Teone Smirneo nè da Nicomaco: il suo nome si trova invece in uno scolio anonimo al IV libro del commento di Giamblico a Nicomaco (1), ma questo dato serve ben poco essendo ignoto chi lo fornisca. Una più esatta determinazione fu proposta da Abulfaragio (celebre storico del XIII sec.), secondo la quale Diofanto avrebbe vissuto sotto Giuliano l' Apostata (361-363 dell' E. v.); benchè questa data concorderebbe col fatto che Diofanto sembra appartenere ad un'epoca di decadimento scientifico e con la sua identificazione a colui che (come narra Suida) fu maestro a Liborio (2), pure fu dimostrata da P. Tannery (3) come da abbandonarsi, perchè riposa sopra un equivoco. Insostenibile è pure l'identificazione — suggerita da Bachet de Méziriac — del nostro Diofanto con un astrologo contemporaneo a Nerone (4). Per converso l'essere vissuto Diofanto sotto Antonino Pio (138-161 dell'E. v.) è un'opinione del Bombelli la quale, per quanto trattata dal Nesselmann come " ipotesi arbitraria „ (5), acquistò in questi ultimi anni molto favore (6), dopo che P. Tannery ne scoperse il fondamento storico (7), ed ancor più dopo che se ne trovò una conferma in una lettera di Psello (8). Ivi la " serie di sette gradi „ costituita dalla unità e dalle prime sei potenze di un numero, che i *Philosophumena* attribuiscono a Pitagora (9) e che troveremo in Diofanto (v. n. 43), viene prolungata

---

(1) *Diofanto ed. Tannery*, T. II, p. 72.

(2) Cfr. Nesselmann, op. cit., 252 4.

(3) V. l'articolo *À quelle epoque vivait Diophante?* (Bull. des sc. math., 2e serie, T. III, 1879) p. 264.

(4) V. la prefazione (p. IX-XI) alla trad. tedesca di Diofanto fatta dallo Schulz; nonchè il succitato articolo del Tannery, p. 265.

(5) Op. cit., p. 245.

(6) V. per es. Heath, op. cit., p. 17.

(7) *À quelle âge* etc., p. 265-267.

(8) P. Tannery *Psellus sur Diophante* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. XXXVII, 1892, Hist. lit. Ath., p. 41-45). V. anche *Diofanto ed. Tannery*, T. II, p. 37.

(9) *Doxographi graeci*, ed. Diels (Berlin, 1879) p. 557.

sino alla decima potenza (1); e tale aggiunta è attribuita ad Anatolio d'Alessandria (v. n. 36). Diofanto deve essere stato pertanto anteriore al celebre vescovo di Laodicea; ciò che si accorda coll'essere egli citato da Teone Alessandrino come un classico.

Da tutto ciò sembra emergere che facendo vivere Diofanto fra il 150 ed il 250 dell'E. v. non si può commettere grave errore (2).

Altre notizie su di lui non otteniamo (neppure ricorrendo agli Arabi) a meno che non accettiamo le informazioni fornite da un epigramma di cui ci occuperemo poi (n. 61), alla qual cosa siamo repugnanti per ragioni che esporremo a suo luogo.

40. Di Diofanto possediamo un'*Aritmetica* ('Αριθμητικά) ed un frammento *Sopra i numeri poligonali;* di un preteso suo lavoro di *Musica* è pressochè dimostrata l'inesistenza (3) e così di un altro intitolato *Porismi;* finalmente un suo trattato sul calcolo frazionario (Μοςιαστικά) non è ricordato che da uno scolio a Giamblico, di mano ignota (4).

Dalla prefazione della prima fra queste opere e dalle intitolazioni dei codici in cui essa trovasi emerge che (al pari degli *Elementi* di Euclide e dell'*Almagesto*) era ripartita in tredici libri; ma di questi, malgrado le affermazioni in contrario (5), sei soli sono tuttora esistenti. La scomparsa parziale di opere antiche è un fatto non raro (Apollonio e Pappo informino!), e che non può nemmeno recare meraviglia, tali e tante essendo state le vicissitudini che attraversarono i manoscritti in cui sono consegnate. Ogni qualvolta essa si presenta, sorge la questione di divinare, e se possibile ricostruire, ciò che fu vittima dell'ingiuria del tempo. Ora se tale divinazione e riedificazione fu relativamente facile per alcuni lavori geometrici — ad es. per l'ultimo libro delle *Coniche* apolloniane (L. II, App. n. 8) — è impossibile per un autore, come Diofanto, di cui ci sono sconosciuti i predecessori; arrogi essere ignoto quanto i discepoli immediati (gli Arabi) aggiunsero del proprio

(1) In particolare le potenze quinta e settima, sono chiamate da Psello ἄλογος πρωτος e ἄλογος δευτερος per ricordare che non sono quadrati nè cubi.

(2) Una probabile conferma troveremo più avanti (n. 58).

(3) *Diofanto ed. Tannery*, T. II, p. VIII.

(4) *Giamblico ed. Pistelli*, p. 127, linea 11.

(5) Cfr. Nesselmann, p. 257, ove esse sono dimostrate insussistenti.

a quello che il maestro ha pensato e scritto. Ciò spieghi la disparità delle ipotesi intorno alla parte perduta dell'*Aritmetica* di Diofanto; citiamo le più cospicue. Il Bombelli — considerando forse quanto sapore diofanteo abbia la nota soluzione data da Lodovico Ferrari per le equazioni di quarto grado — riteneva che ivi il matematico greco insegnasse la soluzione delle equazioni cubiche e biquadratiche (1); il Montucla (2) e lo Schulz invece credevano che ivi fosse contenuta la teoria delle " triple equazioni " che Fermat diede (3) come estensione di quella delle " doppie equazioni " inventate (v. più avanti n. 52) dall'autore di cui attualmente ci occupiamo. Di natura essenzialmente differente da quelle testè riferite è una terza congettura emessa dal Colebrooke (4), sostenuta dal Nesselmann (5) e recentemente accettata dal Hankel (6) e dal Heath (7): secondo essa la mutilazione subita dall'opera di Diofanto sarebbe assai meno considerevole di quanto risulta dal semplice paragone dei numeri tredici e sei; essa proverrebbe piuttosto da perdite sofferte nel corpo di essa (specialmente fra i libri I e II) e dalla soppressione dell'antica suddivisione, che dalla scomparsa completa dei sette ultimi libri: cosicchè il piano originario dell'opera diofantea sarebbe quello che appare dall'esame che oggi può farsene. Questa tesi è così consolante che non domanderemmo di meglio di poterla presentare come conforme od almeno prossima al vero; ma, sgraziatamente, uno studio accurato di tutti i codici dell'Aritmetica (8) non somministra alcun argomento a favore di essa; sicchè noi non possiamo adottarla e preferiamo augurare che le continue ricerche che si vanno facendo nelle più ricche biblioteche, da persone dotte nella filologia classica e nella orientale, conducano

---

(1) Per dimostrare la poca probabilità di tale ipotesi, basta osservare che gli Indiani e gli Arabi non conobbero la risoluzione delle equazioni di grado superiore al secondo.

(2) *Hist. des Mathém.*, T. I, p. 321.

(3) *Oeuvres de Fermat*, ed. Tannery et Henry, T. I, p. 324 e T. III, p. 269.

(4) *Algebra with Arithmetic and Mensuration* (London, 1817) p. LXI.

(5) Op. cit., p. 265.

(6) *Zur Geschichte der Math. in Alterthum und Mittelalter* (Leipzig, 1874), p. 158.

(7) Op. cit. p. 26 e seg.

(8) P. Tannery, *La perte de sept livres de Diophante* (Bull. des sciences math., 2.e série, T. VIII, 1884).

riguardo a Diofanto ad una di quelle clamorose scoperte analoghe a quelle che tanta luce projettarono sulla questione eroniana (L. III, nn. 61-62 e 71).

Oltre ai sei primi libri dell'*Aritmetica,* di Diofanto possediamo (come dicemmo già) un frammento sui numeri poligonali; la natura delle proposizioni ivi contenute (sono teoremi, non problemi come nell'*Aritmetica*) e la forma in cui è scritto (cioè l'intervento di rappresentazioni geometriche, le quali sono totalmente bandite dall'*Aritmetica* (1)) lo designano come appartenente ad un lavoro che nulla ha a che vedere con l'*opus magnum* di Diofanto. Ciò non ostante il Nesselmann, a sostegno e complemento della riferita " tesi di consolazione ", ne formò una sezione di quello, opinione questa che trova oggi scarsi aderenti. Nè basta. Nell'*Aritmetica* Diofanto cita più volte alcune proposizioni ausiliari, a cui dà il nome di " porismi " (2); ciò indusse i primi editori di Diofanto ad ammettere che tali proposizioni fossero estratte da un'opera speciale intitolata appunto *Porismi;* ma questa ipotesi sembra poco probabile, se non altro perchè le citate proposizioni non hanno la forma porismatica, e d'altronde pare che all'epoca di Diofanto la parola porisma non avesse più (cfr. L. II, n. 27) che il significato di corollario (3). È questo l'avviso che, prima di P. Tannery (4), manifestò il Nesselmann. Ma questi aggiungeva che i porismi diofantei non formavano un'opera a sè, ma costituivano una sezione dell'*Aritmetica* secondo il piano primitivo di Diofanto; unendo così i sei libri superstiti dell'*Aritmetica* allo scritto sui numeri poligonali ed ai porismi, Nesselmann credette di avere ricomposti i *disjecta membra* del lavoro capitale di Diofanto, ed addusse come conferma alle sue idee che il titolo (*Cose aritmetiche*) di tale lavoro venne scelto appunto per segnalare la varietà dei temi ivi trattati.

---

(1) Una sola eccezione segnaleremo fra poco (n. 42).

(2) Va notato che esse gettano ben poca luce sulla questione dei porismi (L. II, n. 27-28) non essendo certo che fossero date da Diofanto come proposizioni di tal fatta e non piuttosto come ausiliari.

(3) Sotto forma prettamente porismatica troviamo invece il Lemma al prob. V, 8, che suona così: dati tre quadrati, esistono altri tre quadrati i cui prodotti binari sono eguali ad essi.

(4) Mem. da ultimo citata.

Non ci dilunghiamo su tale fantastica ricostruzione che è atterrata dall'ispezione dei codici diofantei: e piuttosto segnaliamo, dopo tante questioni irrisolubili concernenti Diofanto e le sue opere, un problema storico suscettibile almeno di una soluzione approssimata, il problema cioè di determinare l'epoca in cui l'*Aritmetica* di Diofanto subì le torture che la ridussero nello stato in cui essa si trova. Ora, notando che il commento a Diofanto attribuito a Massimo Planude (1) suppone che, almeno i primi due libri, fossero sin d'allora nello stato in cui li possediamo oggi, si acquista la certezza che quel misfatto letterario fu compiuto dai Greci prima del Sec. XIV. L'esame di altre fonti (2) abilita poi a farlo retrocedere al Sec. XI e fors'anche al X.

41. L'*Aritmetica* di Diofanto — che venne tradotta in arabo nella seconda metà del X Sec. — esiste in parecchî codici fra loro concordanti (3). Essa venne pubblicata per la prima, tradotta in latino, nel 1571 per cura di G. Holtzmann (4): malgrado i difetti di tale lavoro, rimarrà un solido titolo di gloria imperitura per chi lo ha compiuto l'avere richiamato alla memoria uno scrittore completamente dimenticato; l'influenza esercitata dalla risurrezione di Diofanto è così straordinaria che per misurarla converrebbe far l'inventario di parte dell'algebra odierna e di tutta la teoria dei numeri. — Il testo greco dell'opera di cui ci occupiamo apparve mezzo secolo dopo, per merito di Bachet de Meziriac, accompagnato da savî commenti e dotte annotazioni (5); una seconda edizione di quest'opera fu pubblicata da S. Fermat, figlio del celebre matematico, nel 1670 (6): è inferiore come correzione alla precedente,

---

(1) Riguardo alla legittimità di tale attribuzione vennero sollevati dei dubbi da P. Tannery (Bull. des Sc. math., 2ᵉ Série, T. VIII, 1884, p. 271).

(2) Heath., op. cit., p. 26.

(3) Cossali, op. cit., T. I, p. 61; Nesselmann, op. cit., p. 256; Heiberg, *Philologus*, T. XLIII, p. 500-501; Heath, op. cit., p. 19; Diofanto ed. Tannery, T. II, pref.

(4) *Diophanti Alexandrini Rerum Arithmeticorum libri sex, quorum primi duo adjecta habent scholia Maximi* (*ut conjectura est*) *Planudi, etc. A Guil. Xylandro* (Basilae, 1571).

(5) *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Nunc primum Graece et Latine edidit etc. Auctore* C. G. Bacheto Meziriaceo (Lutetiae Paris, 1621).

(6) *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, etc. Cum commentariis G. G. Bacheti et observationibus D. P. Fermat etc.* (Tolosae, 1670).

ma è assai pregiata e ricercata perchè ivi videro la luce quelle importantissime *Osservazioni sopra Diofanto* mediante cui Fermat può dirsi abbia gettati i fondamenti della moderna aritmetica superiore. Oggi siamo in possesso di una edizione critica di Diofanto, capace di soddisfare le esigenze più severe; è quella di P. Tannery che già citammo ed a cui costantemente ci riferiremo (1).

In veste moderna Diofanto cominciò a presentarsi al pubblico quando F. T. Poselger tradusse in tedesco il libro *Sui numeri poligonali* (2). Tale esempio fu tosto seguito da O. Schulz, al quale siamo debitori di un'ottima traduzione nella stessa lingua di quanto ci resta delle opere del celebre aritmetico greco (3). Di recente una nuova versione tedesca, ancora più pregevole della precedente, fu condotta a termine da G. Wertheim (4). Ma prima l'Heath, in un lavoro già da noi ricordato, riprendendo un progetto in parte effettuato da Alberto Girard e Stevino (5), ha esposto sotto forma moderna e succinta tutta la materia trattata da Diofanto, facilitando così l'intelligenza dell'opera greca ed accrescendo il numero di coloro che l'ammirano. Con questo scritto chiudiamo l'elenco delle edizioni e traduzioni che ebbe Diofanto, e ci volgiamo ad esaminare

---

(1) Il lettore avvertirà un disaccordo fra i numeri con cui noi, seguendo il Tannery, designeremo i problemi di Diofanto e quelli che i problemi stessi portano nell'edizione di Bachet; la ragione sta in ciò che Bachet indicò coi numeri successivi tutte le proposizioni di ogni libro, mentre il Tannery si limitò ai soli problemi. Quindi il Diofanto di Bachet comprende

$$43 + 36 + 24 + 46 + 33 + 26 = 208$$

proposizioni, mentre in quello di Tannery si trovano

$$39 + 35 + 21 + 40 + 30 + 24 = 189$$

problemi. Siccome il Tannery indicò anche la numerazione antica, così la corrispondenza si stabilisce molto agevolmente ricorrendo all'edizione da noi adoperata.

(2) *Diophantus von Alexandrien über die Polygonzahlen, übersetzt mit Zusäzen* (Leipzig, 1810).

(3) *Diophantus von Alexandrien arithmetische Aufgaben nebst dessen Schrift über die Polygon-Zahlen* (Berlin, 1822).

(4) *Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonzahlen des Diophantus von Alexandrien* (Leipzig, 1890).

(5) Cfr. Cossali, op. cit, T. I, p. 71.

di quale natura e di quale entità è il contributo che egli diede alle nostre cognizioni sui numeri.

42. L'*Aritmetica* di Diofanto è una collezione di problemi, parte determinati e parte non, risoluti in generale senza ricorrere alla rappresentazione geometrica di Euclide (1), col mezzo di artifici ingegnosi e felicissimi, ma che oggi non tutti si giudicherebbero come legittimi (2). Tali artifici non vengono esposti in generale, sicchè le parole di Diofanto non porgono il mezzo di determinarne con qualche esattezza il campo di applicabilità, nè dànno alcun indizio dei motivi per cui egli se ne servì in queste piuttosto che in altre questioni.

Il metodo sintetico governa dunque l'aritmetica di Diofanto come vedemmo dominare nella geometria di Euclide; ora, mentre non gravi inconvenienti hanno origine dall'essere rimasta gelosamente celata la via che condusse ai teoremi che questi espone, gran danno proviene, a chi vuol addestrarsi nella difficile arte di risolvere i problemi, dall'essere avvolte nel mistero le considerazioni teoriche che guidarono a concepire e poi risolvere le questioni trattate da Diofanto: ciò spiega forse perchè questi non abbia dietro a sè uno stuolo e nemmeno un drappello di seguaci. Nè va taciuto che tal modo di procedere reca sorpresa al lettore il quale a tutt'altro si attendeva leggendo la prefazione generale dell'opera, che suona così:

Onoratissimo Dionisio, Siccome mi avvedo che tu ti sforzi assiduamente ad imparare la soluzione dei problemi di aritmetica, così ho tentato di esportene scientificamente il metodo, cominciando dal considerare la natura e le proprietà dei numeri, poichè su di questo poggia tutto il resto. La materia ti sembrerà forse un po' difficile perchè non la conosci ancora ed i principianti hanno poca fiducia d'imparare; ma diligenza da parte tua e quanto ti espongo io ti renderanno agevole tutto, giacchè si apprende presto quando si accoppiano buona voglia ed istruzione.

---

(1) Fa solo eccezione il problema 10 del Libro V, che Hankel (op. cit., p. 150) ritenne interpolato, ipotesi non confermata dai m.ss.

(2) Per confermare mediante un esempio questo giudizio si offre spontaneamente il problema IV, 7, ove si tratta di risolvere il sistema:

$$y^3 + x^2 = u^2 \quad , \quad z^2 + x^2 = v^3.$$

Diofanto, a tale scopo, introduce arbitrariamente la condizione $v = y$, e così semplifica tanto la questione (la riduce a sciogliere l'equazione $z^2 + 2x^2 = u^2$) da poterla risolvere; ma non si accorge di ottenere soltanto una soluzione particolarissima.

Una raccolta di problemi, composta mediante criterî non dichiarati (1) nè percepibili senza ambiguità, si presta, non meno di un'opera quale è la *Collezione* di Pappo (v. L. IV, n. 7), a venire modificata da ricopiatori infedeli, i quali di loro arbitrio si accordano la facoltà di sopprimere qui un problema che a loro non piace per aggiungerne altrove un altro suggerito dall'analogia, senz'accorgersi che così trasformano un'opera sapientemente architettata, quale era probabilmente in origine l'*Aritmetica* di Diofanto, in un indigesto centone, quale in varî punti essa oggi si presenta (2). Per dimostrare quali e quante licenze si permisero coloro che ci conservarono mediante la scrittura l'opera che ci occupa, citiamo qualche esempio.

I problemi 1-7 del II Libro si connettono in modo così naturale a quelli con cui si chiude il I che vien fatto di domandarci a quali concetti siasi ispirato il geometra greco nel decidere la presente ripartizione della materia nei varî libri che possediamo; ora dal rispondere a tale difficile questione si è esonerati osservando che il più recente editore di Diofanto ritiene che quei problemi appartenessero in origine ad un antico commento al I libro, e che dei ricopiatori poco intelligenti li abbiano collocati in testa al II Libro invece che in coda al I, ove essi avevano il loro posto naturale. Lo stesso può ripetersi riguardo ai primi quattro problemi del III Libro, i quali meriterebbero di stare uniti a quelli con cui si chiude il Libro precedente. Dallo stesso ipotetico commento vennero presumibilmente estratti i problemi 17 e 18 del II Libro, che sono pressochè identici a quelli del I Libro recanti i numeri 22 e 23, e le seconde soluzioni dei problemi 5, 6 e 15 del III Libro. Aggiungasi che i problemi 14 e 15 del II Libro si incontrano di nuovo, senz'alcuna ragione, nel Libro successivo, ove portano i numeri 20 e 21.

43. Prima di esporre la soluzione dei problemi che costituiscono il midollo della sua opera, il geometra greco si indugia a far conoscere un gruppo di teoremi ed un sistema di abbreviazioni (simboli) che, poichè lo pongono a capo degli algebristi, meritano da parte nostra una analisi alquanto particolareggiata.

---

(1) La norma di passare dal semplice al composto, alla quale Diofanto dice di attenersi, è troppo vaga per potersi ascrivere fra i rigorosi criterî regolatori.

(2) Tale stato dell'opera di Diofanto esonera dall'addentrarsi in uno studio dello stile in cui è scritta, in particolare dispensa dal rilevarne le diseguaglianze.

Cominciamo dal notare che Diofanto considera, al pari di Talete (v. n. 19), ogni numero come collezione di unità, onde nell'*Aritmetica* la parola *numero* è sinonimo di *numero intero:* ciò non ostante *di ogni problema indeterminato egli cerca, non già le soluzioni intere (come è costume fra i moderni), ma semplicemente quelle razionali positive.* Dopo di avere rilevato essere la serie dei numeri illimitata, egli distingue in essa i quadrati (τετράγωνος), i cubi (κύβος), i biquadrati (δυναμοδύναμις), i quadrato-cubi (δυναμόκυβος) ed i bicubi (κυβόκυβος); queste cinque specie di numeri assieme alla prima potenza ed all'unità costituiscono la " serie di sette gradi " attribuita a Pitagora (cfr. n. 38). " Considerando (dice Diofanto) la somma, o la differenza, o il prodotto o il rapporto di questi numeri fra di loro o combinati con i loro lati, si arriva ad enunciare una folla di problemi, alla cui soluzione si giunge pel cammino che insegnerò ". Da tale dichiarazione emerge che le questioni trattate da Diofanto non furono suggerite dalla geometria (1) o da altre scienze e nemmeno dalla pratica; ed infatti le uniche figure considerate dal nostro autore sono i triangoli rettangoli, ma in numeri, e di questioni enunciate sotto forma di " problème plaisant et délectable " ve ne è una sola (Lib. V, 30): approfittando appunto di questa indipendenza delle sue considerazioni da rappresentazioni concrete, Diofanto si è ritenuto autorizzato ad addizionare quadrati con cubi e con linee, cosa illecita nel sistema euclideo di aritmetica geometrica.

Per indicare l'unità Diofanto adopera il simbolo $\overset{\circ}{M}$ (abbreviazionedi μόνας) e per indicarne i multipli lo fa seguire dalle relative indicazioni di questi (esempio: $\overset{\circ}{M}\kappa' = 20$). Un segno speciale serve a designare un numero incognito (detto ἀριθμός); tale simbolo veniva declinato come una parola, ma per indicarne il plurale Diofanto preferiva scrivere due volte il simbolo stesso: da ciò trae forse origine il sistema di scrivere *nn* in luogo di n^2, che continuò sino a tutta la prima metà del secolo XIX. Le prime cinque potenze dell'incognita erano indicate coi simboli seguenti

$$\Delta^{Y}\quad,\quad K^{Y}\quad,\quad \Delta\Delta^{Y}\quad,\quad \Delta K^{Y}\quad,\quad KK^{Y}$$

(1) Fa eccezione il probl. 16 del VI Libro e forse (v. più avanti, n. 46) quello che porta il n. 39 nel I.

di cui Diofanto (lo dichiara egli stesso) non è l'inventore; per le potenze successive non vennero introdotti simboli speciali, probabilmente perchè non avrebbero trovata applicazione in alcuno dei problemi trattati.

Riguardo a questa simbolica va notato che essa ha due gravi inconvenienti; uno si è che non manifesta l'intima relazione esistente fra l'incognita e le sue potenze; l'altra si è che mal si presta a trattare i problemi con parecchie incognite (1), ed infatti Diofanto è costretto a considerare queste separatamente, applicando a ciascuna, volta per volta, gli stessi simboli. Riguardo poi al segno con cui viene designata l'incognita, rileveremo come per molto tempo venne scambiato con un *sigma* finale e si giustificò tale applicazione osservando che questa è l'unica lettera dell'alfabeto greco priva di valore numerico (2) (v. n. 6). Che però quello sia invece un segno *ad hoc* fu osservato, anche prima della comparsa dell'edizione critica di Diofanto, da T. L. Heath (3). Il quale inoltre sollevò la questione intorno alla genesi di quel segno e la risolse considerando questo come proveniente da una contrazione della sillaba αρ iniziale della parola ἀριθμός, e confermò tale ipotesi osservando che analoga è l'origine dei simboli che Diofanto adopera per indicare le potenze successive dell'incognita. Le argomentazioni del Heath furono combattute dal Gow (4) e poi riconfermate dal loro autore (5) ed approvate in massima dal Cantor (6); se anche non possono ritenersi per definitive, pure hanno il gran merito di avere agitata e rischiarata una questione assai importante, quella cioè di sapere se la simbolica diofantea sia un semplice sistema di abbreviazioni, oppure uno sviluppo del sistema aristotelico (7) di indicare ogni concetto con una lettera, se quindi rappresenti o non il primo stadio dell'algebra da noi adoperata.

---

(1) È il medesimo inconveniente che ha la simbolica di Stevino e de' suoi contemporanei e compatrioti: i quali, come si sa, per indicare x, x^2, x^3, ... ponevano entro un circoletto i numeri 1, 2, 3, ...

(2) Nesselmann, p. 290-291.

(3) *On a point of notation in the Arithmetics of Diophants* (Journ. of philology, T. XIII, p. 117-113).

(4) *A short History of greek Mathematics* (Cambridge, 1884), p. IX.

(5) *Diophantos of Alexandria* etc., p. 63-67.

(6) *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed., 1894), p. 440.

(7) V. ad es. *Fisica*, VII, 5.

A questo punto della sua nomenclatura e della sua simbolica non si arresta Diofanto. Accadendo, infatti, assai spesso di dovere considerare le frazioni che hanno per numeratore l'unità e per denominatore le prime sei potenze (dalla prima alla sesta) dell'incognita, Diofanto adopera per indicarle ordinatamente i nomi seguenti: αριθμοστόν, δυναμοστόν, κυβοστόν, δυναμοδυναμοστόν, δυναμοκυβοστόν, κυβοκυβοστόν; nomi ai quali corrispondono altrettanti simboli che si ottengono scrivendo al di sopra di quelli adoperati per l'incognita e le sue potenze un segno speciale (che non è, come venne asserito, una semplice lineetta).

I numeri delle tredici categorie considerate da Diofanto moltiplicati fra di loro dànno luogo ad altri numeri analoghi, come provano le relazioni seguenti, da lui segnalate per valori di m e n la cui somma sia inferiore a 6:

$$1 \cdot x^m = x^m \quad ; \quad x^m \cdot \frac{1}{x^m} = 1 \quad ; \quad x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad ;$$

$$\frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^{m+n}} \quad ; \quad \frac{1}{x^m} \cdot x^n = \begin{cases} x^{n-m} & \text{se } n > m \\ \dfrac{1}{x^{m-n}} & \text{se } m > n \, . \end{cases}$$

Queste identità sono il fondamento della moltiplicazione e della divisione dei monomî. Per la moltiplicazione dei polinomî fa mestieri sapere che " meno per meno fa più " e " meno per più fa meno "; ora è notevole che Diofanto conosce questi teoremi, benchè gli manchi il concetto di numero negativo isolato; anzi, siccome egli non si arresta a dimostrarli, è evidente che erano noti ai suoi tempi, e venivano probabilmente stabiliti con quel ragionamento geometrico che si legge in uno scolio (di Massimo Planude?) al relativo passo di Diofanto (1).

E qui va notato che, mentre Diofanto indica l'addizione algebrica scrivendo semplicemente di seguito i termini da sommarsi, invece adopera, quanto si tratti di una sottrazione, un simbolo speciale che (come egli dice) " somiglia ad una Ψ rovesciata e tronca ", e del quale è ignota l'origine (2); questo sistema è in disaccordo con

(1) Diofanto ed. Tannery, T. II, p. 139.

(2) Per una ipotesi relativa v. Heath, *Diophantos of Alexandria*, p. 72-73.

quello che il Brugsch (1) ha segnalato in alcuni papiri ove la " lineola obliqua " serve come simbolo di addizione, un " uncius semilunari " per la sottrazione ed un terzo segno per indicare il totale.

I due membri di un' eguaglianza vengono chiamati da Diofanto εἶδος, donde *species* dei Latini; sono scritti di seguito, divisi dalla parola ἴσος o ἴσοι abbreviata in ισ o ι; ecco un semplicissimo esempio dell' aspetto sotto cui le equazioni s' incontrano nell' *Aritmetica* che percorriamo:

$$\Delta^{Y}\, \overline{\kappa\varepsilon}\ \text{ἴσαι}\ \varsigma\overline{\sigma} \quad (25x^2 = 200x)$$

44. Col mezzo di questa simbolica — di cui ognun vede l' analogia con quella che noi oggi adoperiamo — Diofanto esegue tutte le operazioni sui polinomî e l' applica, per primo forse (2), a trasformare e trattare le equazioni in cui egli s' imbatte: infatti egli suggerisce di effettuare la riduzione dei termini simili e, combinandola, occorrendo, col trasporto di termini da un membro all' altro, di ottenere che nei due membri non restino che termini positivi fra loro dissimili. Se, fatte tutte queste operazioni, si ottiene un' *equazione binomia,* il problema proposto potrà sciogliersi nel modo che emerge dall' esposizione diofantea; ma se la riduzione, per quanto spinta innanzi, conduce ad un' *equazione trinomia,* occorrono nuovi procedimenti, che Diofanto promette di insegnare, ma che indarno si cercano nei libri superstiti dell' *Aritmetica;* anzi tale assenza è uno degli argomenti fondamentali che vennero addotti per sostenere che questi non rappresentano la totalità dell' opera diofantea. I summenzionati procedimenti si ritengono di consueto che non raggiungessero se non le equazioni quadratiche complete, perchè così si restringe il sapere dell' aritmetico greco ad un *minimum* irriducibile e che nulla autorizza ad affermare sia stato da lui oltrepassato. Tuttavia, anche così facendo, si va incontro a problemi storici difficilissimi, di cui a suo tempo terremo parola.

Qui intanto osserviamo che Diofanto, dopo avere fatte conoscere le generalità dottrinali di cui testè ci occupammo, passa a risolvere

(1) *Numerorum apud veteres Aegyptios demoticorum doctrina* (Berolini, 1849), p. 31.

(2) « Bei Diophant treten denn auch zuerst algebraische Gleichungen auf. . . . » (Hankel, *Zur Geschichte* etc., p. 159).

i problemi che gli piace studiare. Per far conoscere al lettore di quale natura siano nulla di meglio ci sembra che il presentare qui in un quadro le equazioni a cui conducono i problemi stessi, con accanto i numeri che indicano la collocazione di questi; ci permettemmo di surrogare quasi sempre le costanti numeriche dell'originale con altrettante costanti letterali, e di disporre secondo un certo ordine le equazioni considerate: ci affrettiamo a dichiarare subito che tale ordine era certamente ben lungi dalle idee di Diofanto, al quale è rimasta ignota la fondamentale differenza che passa tra problema indeterminato e problema determinato (1). Per converso egli si accorto dell'analogia che esiste fra parecchi problemi trattati, sicchè questi formano tanti gruppi; nel seguente quadro una graffa serve a collegare i membri di ciascun gruppo. Notisi poi che in molti casi il nostro autore riduce un problema ad un altro; ora è chiaro che questo secondo aveva diritto di un posto nella nostra tabella, e noi glielo accordammo, scrivendo accanto alla relativa equazione i numeri che indicano la collocazione del problema primitivo, in parentesi. Similmente facemmo per i problemi funzionanti da lemmi. Da ultimo con un asterisco apposto al simbolo di collocazione di un problema indicheremo che questo si suppone interpolato.

Elenco delle equazioni risolute da Diofanto.

Equazioni di 1.° grado ad un' incognita.

I, 7. $\frac{x-a}{x-b}=\lambda$ (2)

I, 8. $\frac{x+a}{x+b}=\lambda$

I, 9. $\frac{a-x}{b-x}=\lambda$ (2)

I, 10. $\frac{a+x}{b-x}=\lambda$

I, 11. $\frac{x+a}{x-b}=\lambda$

(1) Tanto vero che egli crede lecito di rendere determinato un problema che non lo sia assumendo ad arbitrio il valore di una incognita o di qualche sua funzione.

(2) L'identità dei problemi 7 e 9 non è avvertita da Diofanto.

I, 39.
$$\begin{cases}(a+b)x+(b+x)a=2(a+x)b\\(a+x)b+(b+x)a=2(a+b)x\\(a+x)b+(a+b)x=2(b+x)a\end{cases}$$

Sistemi determinati di equazioni lineari.

I, 1. $x+y=a \quad , \quad x-y=b$

I, 2. $x+y=a \quad , \quad \frac{x}{y}=\mu$

I, 4. $x-y=a \quad , \quad \frac{x}{y}=\mu$

I, 3. $x+y=a \quad , \quad \frac{x-b}{y}=\mu$

I, 5. $x+y=a \quad , \quad \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=b$

I, 6. $x-y=a \quad , \quad \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=b$

I, 12. $x_1+x_2=a \quad , \quad y_1+y_2=a \quad , \quad x_1=\lambda_1 y_1 \quad , \quad x_2=\lambda_2 y_2$

I, 13. $x_1+x_2=a \; , \; y_1+y_2=a \; , \; z_1+z_2=a \; , \; y_1=\lambda z_2 \; , \; z_1=\mu x_2 \; , \; x_1=\nu y_2$

I, 15. $\frac{x+a}{y-a}=\alpha \quad , \quad \frac{y+b}{x-b}=\beta$

I, 16. $y+z=a \quad , \quad z+x=b \quad , \quad x+y=c$

I, 17. $y+z+u=a \quad , \quad z+u+x=b \quad , \quad u+x+y=c \quad , \quad x+y+z=d$

I, 18. $-x+y+z=a \quad , \quad x-y+z=b \quad , \quad x+y-z=c$

I, 19. $-x+y+z+u=a \quad , \quad x-y+z+u=b \quad , \quad x+y-z+u=c$
$x+y+z-u=d$

I, 20. $x+y+z=a \quad , \quad \frac{x+y}{z}=p \quad , \quad \frac{y+z}{x}=q$

I, 21. $x-y=\frac{z}{p} \quad , \quad y-z=\frac{x}{q} \quad , \quad z-a=\frac{y}{r}$

II, 18.
$$x+y+z=a \; , \; x-\left(\frac{y}{m}+a\right)+\left(\frac{z}{p}+c\right)=y-\left(\frac{y}{n}+b\right)+$$
$$+\left(\frac{x}{m}+a\right)=z-\left(\frac{z}{p}+c\right)+\left(\frac{y}{n}+b\right)$$

Sistemi determinati di equazioni riducibili al I e II grado.

I, 26.	$ax = (bx)^2$
I, 27.	$x + y = 2s \quad , \quad xy = p$
I, 30.	$x - y = 2d \quad , \quad xy = p$
I, 28.	$x + y = 2s \quad , \quad x^2 + y^2 = 2q^2$
I, 29.	$x + y = 2s \quad , \quad x^2 - y^2 = 4q^2$
I, 31.	$\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \nu$
I, 32.	$\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \nu$
I, 33.	$\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \nu$
I, 34.	$\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \nu$
I, 34. Coroll.	$\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{xy}{x \pm y} = \nu$
I, 35.	$\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{y^2}{x} = \nu$
I, 36.	$\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{y^2}{y} = \nu$
I, 35. Coroll.	$\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{x^2}{y} = \nu$; $\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{x^2}{x} = \nu$
I, 37.	$\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{y^2}{x - y} = \nu$
I, 38.	$\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{y^2}{x - y} = \nu$
I, 38. Coroll.	$\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{x^2}{x - y} = \nu$; $\frac{x}{y} = \mu \quad , \quad \frac{x^2}{x + y} = \nu$
II, 6.*	$x - y = m \quad , \quad (x^2 - y^2) - (x - y) = n$
IV, 1.	$x^3 + y^3 = 2a \quad , \quad x + y = 2b$
IV, 2.	$x^3 - y^3 = 2a \quad . \quad x - y = 2b$
IV, 15.	$(y + z)x = a \quad , \quad (z + x)y = b \quad , \quad (x + y)z = c$
IV, 34.	$yz + (y + z) = a^2 - 1 \; , \; zx + (z + x) = b^2 - 1 \; , \; xy + (x + y) = c^2 - 1$
IV, 35.	$yz - (y + z) = a^2 - 1 \; , \; zx - (z + x) = b^2 - 1 \; , \; xy - (x + y) = c^2 - 1$
IV, 36.	$\frac{yz}{y + z} = \alpha \quad , \quad \frac{zx}{z + x} = \beta \quad , \quad \frac{xy}{x + y} = \gamma$
IV, 37.	$yz = \alpha(x + y + z) \quad , \quad zx = \beta(x + y + z) \quad , \quad xy = \gamma(x + y + z)$
Lemma a V, 8.	$yz = a^2 \quad , \quad zx = b^2 \quad , \quad xy = c^2$
[VI, 22.]	$x^2 + y^2 = z^2 \quad , \quad x + y + z = 2p \quad , \quad xy = 2s$

Diseguaglianze con un' incognita.

[IV, 25.] $x < \frac{8}{x(x+1)} < x+1$

[IV, 31.] $\frac{b}{a+1} < x^2 < \frac{b+1}{a}$

Analisi indeterminata di I grado.

I, 14. $\frac{xy}{x+y} = \lambda$

I, 22. $x - \frac{x}{m} + \frac{z}{p} = y - \frac{y}{n} + \frac{x}{m} = z - \frac{z}{p} + \frac{y}{n}$

I, 23. $x - \frac{x}{m} + \frac{u}{q} = y - \frac{y}{n} + \frac{x}{m} = z - \frac{z}{p} + \frac{y}{n} = u - \frac{u}{q} + \frac{x}{p}$

I, 24. $x + \frac{y+z}{m} = y + \frac{z+x}{n} = z + \frac{x+y}{p}$

I, 25. $x + \frac{y+z+u}{m} = y + \frac{z+u+x}{n} = z + \frac{u+x+y}{p} = u + \frac{x+y+z}{q}$

II, 17.* (cf. II, 18) $x - \left(\frac{x}{m} + a\right) + \left(\frac{z}{p} + c\right) = y - \left(\frac{y}{n} + b\right) + \left(\frac{x}{m} + a\right) =$

$$= z - \left(\frac{z}{p} + c\right) + \left(\frac{y}{n} + b\right)$$

IV, 33. $\frac{x + \frac{y}{z}}{y - \frac{y}{z}} = \alpha \quad , \quad \frac{y + \frac{x}{z}}{x - \frac{x}{z}} = \beta$

Lemma IV, 34. $xy + (x+y) = a$

Lemma IV, 35. $xy - (x+y) = a$

Analisi indeterminata di II grado.

II, 1.* (cf. I, 31) $\frac{x^2+y^2}{x+y}=\nu$

II, 2.* (cf. I, 34) $\frac{x^2-y^2}{x-y}=\nu$

II, 4.* (cf. I, 32) $\frac{x^2+y^2}{x+y}=\nu$

II, 5.* (cf. I. 33) $\frac{x^2-y^2}{x+y}=\nu$

II, 3.* $\frac{xy}{x\pm y}=\nu$

II, 7.* $\frac{(x^2-y^2)-a}{x-y}=\lambda$

II, 8. $x^2+y^2=a^2$

II, 9. $x^2+y^2=a^2+b^2$

II, 10. $x^2-y^2=d$

II, 11. $a+x=u^2 \quad , \quad b+x=v^2$

II, 12. $a-x=u^2 \quad , \quad b-x=v^2$

II, 13. $x-a=u^2 \quad , \quad x-b=v^2$

II, 14 = III, 21. $y+z=a \quad , \quad y+x^2=u^2 \quad , \quad z+x^2=v^2$

II, 15 = III, 20. $y+z=a \quad , \quad x^2-y=u^2 \quad , \quad x^2-z=v^2$

II, 16. $\frac{x}{y}=m \quad , \quad x+a^2=n^2 \quad , \quad y+a=v^2$

II, 19. $\frac{x^2-y^2}{y^2-z^2}=\lambda$

II, 20. $x^2+y=u^2 \quad , \quad x^2+y^2=v^2$

II, 21. $x^2-y=u^2 \quad , \quad y^2-x^2=v^2$

II, 22. $x^2-(x+y)=u^2 \quad , \quad y^2-(x+y)=v^2$

II, 23. $x^2-(x+y)=u^2 \quad , \quad y^2-(x+y)=v^2$

II, 24. $(x+y)^2+x=u^2 \quad , \quad (x+y)^2+y=v^2$

II, 25. $(x+y)^2-x=u^2 \quad , \quad (x+y)^2-y=v^2$

II, 26. $xy+x=u^2 \quad , \quad xy+y=v^2 \quad , \quad u+v=a$

II, 27. $xy-x=u^2 \quad , \quad xy-y=v^2 \quad , \quad u+v=a$

II, 28. $x^2y^2 + x^2 = u^2 \quad , \quad x^2y^2 + y^2 = v^2$

II, 29. $x^2y^2 - x^2 = u^2 \quad , \quad x^2y^2 - y^2 = v^2$

II, 30. $xy + (x+y) = u^2 \quad , \quad xy - (x+y) = v^2$

II, 31. $xy + (x+y) = u^2 \quad , \quad xy - (x+y) = v^2 \quad , \quad x + y = w^2$

II, 32. $y^2 + z = u^2 \quad , \quad z^2 + x = v^2 \quad , \quad x^2 + y = w^2$

II, 33. $y^2 - z = u^2 \quad , \quad z^2 - x = v^2 \quad , \quad x^2 - y = w^2$

II, 34. $x^2 + (x+y+z) = u^2 \; , \; y^2 + (x+y+z) = v^2 \; , \; z^2 + (x+y+z) = w^2$

II, 35. $x^2 - (x+y+z) = u^2 \; , \; y^2 - (x+y+z) = v^2 \; , \; z^2 - (x+y+z) = w^2$

III, 1.* $(x+y+z) - x^2 = u^2 \; , \; (x+y+z) - y^2 = v^2 \; , \; (x+y+z) - z^2 = w^2$

III, 2.* $(x+y+z)^2 + x = u^2 \; , \; (x+y+z)^2 + y = v^2 \; , \; (x+y+z)^2 + z = w^2$

III, 3.* $(x+y+z)^2 - x = u^2 \; , \; (x+y+z)^2 - y = v^2 \; , \; (x+y+z)^2 - z = w^2$

III, 4.* $x - (x+y+z)^2 = u^2 \; , \; y - (x+y+z)^2 = v^2 \; , \; z - (x+y+z)^2 = w^2$

III, 5. $x+y+z = t^2 \; , \; -x+y+z = u^2 \; , \; x-y+z = v^2 \; , \; x+y-z = w^2$

III, 6. $x+y+z = t^2 \quad , \quad y+z = u^2 \quad , \quad z+x = v^2 \quad , \quad x+y = w^2$

III, 7. $x+y = y-z \; , \; y^2+z^2 = u^2 \; , \; z^2+u^2 = v^2 \; , \; x^2+y = w^2$

III, 8. $x+y+z-a = t^2 \; , \; y+z+a = u^2 \; , \; z+x+a = v^2 \; , \; x+y+a = w^2$

III, 9. $x+y+z-a = t^2 \; , \; y+z-a = u^2 \; , \; z+x-a = v^2 \; , \; x+y-a = w^2$

III, 10. $yz + a = u^2 \quad , \quad zx - a = v^2 \quad , \quad xy - a = w^2$

III, 11. $yz - a = u^2 \quad , \quad zx - a = v^2 \quad , \quad xy - a = w^2$

III, 12. $yz - x = u^2 \quad , \quad zx - y = v^2 \quad , \quad xy - z = w^2$

III, 13. $yz - x = u^2 \quad , \quad zx - y = v^2 \quad , \quad xy - z = w^2$

III, 14. $yz + x^2 = u^2 \quad , \quad zx + y^2 = v^2 \quad , \quad xy + z^2 = w^2$

III, 15. $yz + (y+z) = u^2 \quad , \quad zx + (z+x) = v^2 \quad , \quad xy + (x+y) = w^2$

III, 16. $yz - (y+z) = u^2 \quad , \quad zx - (z+x) = v^2 \quad , \quad xy - (x+y) = w^2$

III, 17. $xy + (x+y) = u^2 \quad , \quad xy + x = v^2 \quad , \quad xy + y = w^2$

III, 18. $xy - (x+y) = u^2 \quad , \quad xy - x = v^2 \quad , \quad xy - y = w^2$

III, 19. $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \pm x_i = u_i^2$ per $i = 1 . 2 . 3 . 4$.

IV, 5. $x^2 + y = u \quad , \quad x + y = u^2$

IV, 13. $x + 1 = t^2 \quad , \quad y + 1 = u^2 \quad , \quad x + y + 1 = v^2 \quad , \quad x - y + 1 = w^2$

IV, 14. $x^2 + y^2 + z^2 = (x^2 - y^2) + (x^2 - z^2) + (y^2 - z^2)$ supposto $x > y > z$

IV, 16. $x + y + z = t^2 \quad , \quad x^2 + y = u^2 \quad , \quad y^2 + z = v^2 \quad , \quad z^2 + x = w^2$

IV, 17. $x + y + z = t^2 \quad , \quad x^2 - y = u^2 \quad , \quad y^2 - z = v^2 \quad , \quad z^2 - x = w^2$

IV, 19. $yz+1=u^2$, $zx+1=v^2$, $xy+1=w^2$

IV, 20. $x_i x_k+1=u_{ik}^2$ $(i, k=1.2.3.4)$

IV, 21. $x-y=u^2$, $x-z=v^2$, $y-z=w^2$, $xz=y^2$ supposto $x>y>z$

IV, 22. $xyz+x=u^2$, $xyz+y=v^2$, $xyz+z=w^2$

IV, 23. $xyz-x=u^2$, $xyz-y=v^2$, $xyz-z=w^2$

IV, 29. $(x^2+y^2+z^2+u^2)+(x+y+z+u)=a$

IV, 30. $(x^2+y^2+z^2+u^2)-(x+y+z+u)=a$

IV, 31. $x+y=1$, $(x+a)(y+b)=u^2$

IV, 32. $x+y+z=a$, $xy+z=u^2$, $xy-z=v^2$

IV, 39. $\frac{x-y}{y-z}=\lambda$, $y^2+z^2=u^2$, $z^2+x^2=v^2$, $x^2+y^2=w^2$

IV, 40. $\frac{x^2-y^2}{y-z}=\lambda$, $y+z=u^2$, $z+x=v^2$, $x+y=w^2$

V, 1. $xz=y^2$, $x-a=u^2$, $y-a=v^2$, $z-a=w^2$

V, 2. $xz=y^2$, $x+a=u^2$, $y+a=v^2$, $z+a=w^2$

V, 3. $x-a=u^2$, $y+a=v^2$, $z+a=w^2$,
$yz+a=u_1^2$, $zx+a=v_1^2$, $xy+a=w_1^2$

V, 4. $x-a=u^2$, $y-a=v^2$, $z-a=w^2$,
$yz-a=u_1^2$, $zx-a=v_1^2$, $xy-a=w_1^2$

V, 5. $y^2z^2+x^2=u^2$, $z^2x^2+y^2=v^2$, $x^2y^2+z^2=w^2$,
$y^2z^2+y^2+z^2=u_1^2$, $z^2x^2+z^2+x^2=v_1^2$, $x^2y^2+x^2+y^2=w_1^2$,

V, 6. $x-2=\xi^2$, $y-2=\eta^2$, $z-2=\zeta^2$;
$yz-x=u^2$, $zx-y=v^2$, $xy-z=w^2$;
$yz-(y+z)=u_1^2$, $zx-(z+x)=v_1^2$, $xy-(x+y)=w_1^2$

Lemma a V, 7 $xy+x^2+y^2=u^2$

V, 7. $x^2\pm(x+y+z)=u^2$, $y^2\pm(x+y+z)=v^2$, $z^2\pm(x+y+z)=w^2$

V, 8. $yz\pm(x+y+z)=u^2$, $zx\pm(x+y+z)=v^2$, $xy\pm(x+y+z)=w^2$

V, 9 (cf. II, 11) $x+y=1$, $x+a=u^2$, $y+a=v^2$

V, 11. $x+y+z=1$, $x+a=u^2$, $y+a=v^2$, $z+a=w^2$

V, 10. $x+y=1$, $x+a=u^2$, $y+b=v^2$

V, 12. $x+y+z=1$, $x+a=u^2$, $y+b=v^2$, $z+c=w^2$

V, 13. $x+y+z=a$, $y+z=u^2$, $z+x=v^2$, $x+y=w^2$

V, 14. $u+x+y+z=a$, $x+y+z=v^2$, $u+y+z=t^2$,
$u+x+z=v^2$, $u+x+y=w^2$

V, 21.	$x^2y^2z^2 + x^2 = u^2 \quad , \quad x^2y^2z^2 + y^2 = v^2 \quad , \quad x^2y^2z^2 + z^2 = w^2$
V, 22.	$x^2y^2z^2 - x^2 = u^2 \quad , \quad x^2y^2z^2 - y^2 = v^2 \quad , \quad x^2y^2z^2 - z^2 = w^2$
V, 23.	$x^2 - x^2y^2z^2 = u^2 \quad , \quad y^2 - x^2y^2z^2 = v^2 \quad , \quad z^2 - x^2y^2z^2 = w^2$
V, 24.	$y^2z^2 + 1 = u^2 \quad , \quad z^2x^2 + 1 = v^2 \quad , \quad x^2y^2 + 1 = w^2$
V, 25.	$y^2z^2 - 1 = u^2 \quad , \quad z^2x^2 - 1 = v^2 \quad , \quad x^2y^2 - 1 = w^2$
V, 26.	$1 - y^2z^2 = u^2 \quad , \quad 1 - z^2x^2 = v^2 \quad , \quad 1 - x^2y^2 = w^2$
V, 27.	$y^2 + z^2 + a = u^2 \quad , \quad z^2 + x^2 + a = v^2 \quad , \quad x^2 + y^2 + a = w^2$
V, 28.	$y^2 + z^2 - a = u^2 \quad , \quad z^2 = x^2 - a = v^2 \quad , \quad x^2 + y^2 - a = w^2$
V, 30.	$8x + 5y = u^2 \quad , \quad u^2 + 60 = (x+y)^2$
[III, 15].	$xy + (x+y) = u^2 \quad , \quad \frac{x+1}{y+1} = v^2$
[III, 16].	$xy - (x+y) = u^2 \quad , \quad \frac{x-1}{y-1} = v^2$
[IV, 31].	$\frac{9}{4} + 18(1 + x^2) = u^2$
[IV, 32].	$\frac{x-1}{x+1} = \frac{u^2}{v^2}$
[V, 2].	$\frac{x^2}{4} > a \quad , \quad x^2 + a = v^2$
[V, 21].	$x^2 + 1 = u^2 \quad , \quad y^2 + 1 = v^2 \quad , \quad z^2 + 1 = w^2$

Analisi indeterminata di III grado.

IV, 3.	$x^2y = u \quad , \quad xy = u^3$
IV, 6.	$y^3 + x^2 = u^3 \quad , \quad z^2 + x^2 = v^2$
IV. 7.	$y^3 + x^2 = u^2 \quad , \quad z^2 + x^2 = v^3$
IV, 8.	$y^3 + x = u^3 \quad , \quad y + x = u$
IV, 9.	$y^3 + x = n \quad , \quad y + x = u^3$
IV, 10.	$x^3 + y^3 = x + y$
IV, 11.	$x^3 - y^3 = x - y$
IV, 12.	$x + y = x^3 + y^3$ (1)
IV, 18.	$x^3 + y = u^3 \quad , \quad x + y^2 = v^2$
IV, 24.	$x + y = a \quad , \quad xy = u^3 - u$

(1) La coincidenza dei problemi IV 11 e 12 non è notata da Diofanto.

IV, 25. — $x+y+z=a$, $xyz=\{(x-y)+(x-z)+(y-z)\}$
supposto $x>y>z$

IV, 26. — $xy+x=u^3$, $xy+y=v^3$
IV, 27. — $xy-x=u^3$, $xy-y=v^3$

IV, 28. — $xy+(x+y)=u^3$, $xy-(x+y)=v^3$

[IV, 28]. — $\left(\frac{x^3-y^3}{2}\right)^2-\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)=u^2$

IV, 38. — $(x+y+z)x=\frac{\xi(\xi-1)}{2}$, $(x+y+z)y=\eta^2$, $(x+y+z)z=\zeta^3$

V, 15. — $(x+y+z)^3+x=u^3$, $(x+y+z)^3+y=v^3$, $(x+y+z)^3+z=w^3$
V, 16. — $(x+y+z)^3-x=u^3$, $(x+y+z)^3-y=v^3$, $(x+y+z)^3-z=w^3$
V, 17. — $x-(x+y+z)^3=u^3$, $y-(x+y+z)^3=v^3$, $z-(x+y+z)^3=w^3$

V, 18. — $x+y+z=t^2$, $(x+y+z)^3+x=u^2$, $(x+y+z)^3+y=v^2$,
$(x+y+z)^3+z=w^2$
V, 19. — $x+y+z=t^2$, $(x+y+z)^3-x=u^2$, $(x+y+z)^3-y=v^2$,
$(x+y+z)^3-z=w^2$

[V, 19]′ — $x+y+z=t^2$, $x-(x+y+z)^3=u^2$, $y-(x+y+z)^3=v^2$,
$z-(x+y+z)^3=w^2$

[V, 19]″ — $x+y+z=a$, $(x+y+z)^3+x=u^2$, $(x+y+z)^3+y=v^2$,
$(x+y+z)^3+z=w^2$

[V, 19]‴. — $x+y+z=a$, $(x+y+z)^3-x=u^2$, $(x+y+z)^3-y=v^2$,
$(x+y+z)^3-z=w^2$

V, 20. — $x+y+z=a$, $x-(x+y+z)^3=u^2$, $y-(x+y+z)^3=v^2$,
$z-(x+y+z)^3=w^2$ (1)

[IV, 8], — $x-y=1$, $x^3-y^3=u^2$

[IV, 9, 10]. — $\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{u^2}{v^2}$

[IV, 11]. — $\frac{x^3-y^3}{x-y}=\frac{u^2}{v^2}$

[V, 17]. — $x^3+y^3+z^3+3=u^2$

---

(1) I problemi [V, 19]′, [V, 19]″ e [V, 19]‴ colmano una lacuna, che deturpa il testo di Bachet, e che il Nesselmann ha per primo segnalata (*Die Algebra der Griechen*, p. 410-412).

Analisi indeterminata di IV grado.

V, 29.	$x^4 + y^4 + z^4 = u^2$
| V, 19 |.	$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = u^4$

Costruzione di triangoli rettangoli in numeri razionali.

N. B. — Nei problemi seguenti è sottintesa la equazione $x^2 + y^2 = z^2$ e le analoghe.

Lemma a V, 7.	$xy = x_1y_1 = x_2y_2$
VI, 1.	$z - x = u^3 \quad , \quad z - y = v^3$
VI, 2.	$z + x = u^3 \quad , \quad z + y = v^3$
VI, 3.	$\frac{1}{2}xy + a = u^2$
VI, 4.	$\frac{1}{2}xy - a = u^2$
VI, 5.	$a - \frac{1}{2}xy = u^2$
VI, 6.	$\frac{1}{2}xy + x = a$
VI, 7.	$\frac{1}{2}xy - x = a$
VI, 8.	$\frac{1}{2}xy + (x + y) = a$
VI, 9.	$\frac{1}{2}xy - (x + y) = a$
VI, 10.	$\frac{1}{2}xy + (x + z) = a$
VI, 11.	$\frac{1}{2}xy - (x + z) = a$
VI, 12.	$\frac{xy}{2} + x = u^2 \quad , \quad \frac{xy}{2} + y = v^2$
VI, 13.	$\frac{xy}{2} - x = u^2 \quad , \quad \frac{xy}{2} - y = v^2$

VI, 14. $\frac{xy}{2} - x = u^2 \quad , \quad \frac{xy}{2} - z = v^2$

VI, 15. $\frac{xy}{2} + x = u^2 \quad , \quad \frac{xy}{2} + z = v^2$

VI, 16. Trovare un triang. rett. di cui la bisettrice d'un angolo acuto sia razionale.

VI, 17. $\frac{xy}{2} + z = u^2 \quad , \quad x + y + z = v^3$

VI, 18. $\frac{xy}{2} + z = u^3 \quad , \quad x + y + z = v^2$

VI, 19. $\frac{xy}{2} + x = u^3 \quad , \quad x + y + z = v^2$

VI, 20. $\frac{xy}{2} + x = u^2 \quad , \quad x + y + z = v^3$

VI, 21. $x + y + z = u^2 \quad , \quad \frac{xy}{2} + (x + y + z) = v^3$

VI, 22. $x + y + z = u^3 \quad , \quad \frac{xy}{2} + (x + y + z) = v^2$

VI, 23. $z^2 = u^2 + u \quad , \quad \frac{z^2}{x} = v^3 + v$

VI, 24. $x = u^3 \quad , \quad y = v^3 - v \quad , \quad z = w^3 + w$

Lemma a VI, 12. $x = u^2 \quad , \quad x - y = v^2 \quad , \quad \frac{xy}{2} + y = w^2$

[VI, 6]. $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} xy = u^2$

[VI, 8]. $\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} xy = u^2$

[VI, 10]. $\left(\frac{x + z}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} xy = u^2$

[VI, 15]. $u^2 (z + x) - \frac{1}{2} xy \,.\, x (z - x) = v^2$

45. La semplice ispezione di questo prospetto manifesta subito quali siano stati i criterî di analogia da cui si è lasciato guidare Diofanto nel formulare le questioni trattate.

In primo luogo egli ha considerato, quando ciò era possibile, i problemi fra loro corrispondenti in due, tre, ecc. variabili; nacquero così le coppie: I, 16 e 17; I, 22 e 23; I, 24 e 25; V, 9 e 11;

V, 10 e 12; V, 13 e 14, coppie le quali potrebbersi agevolmente trasformare in terne, quaterne, ecc., cosa indubbiamente notata dal geometra greco.

In secondo luogo egli ha considerati molti problemi le cui equazioni formano sistemi aventi primi membri di uno dei tre tipi seguenti:

$$\left.\begin{array}{c} f(x_1, x_2, \dots, x_n) + F(x_i), \\ f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) + a_i \\ f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) + F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array}\right\} (i = 1, 2, \dots, n)$$

ove f e F sono funzioni simmetriche dei relativi argomenti; orbene in moltissimi casi egli ha trattati gli analoghi sistemi i cui primi membri sono

$$\pm \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - F(x_i)\}$$
$$\pm \{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) - a_i\}$$
$$\pm \{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\}.$$

Come esempî di tali terne di equazioni addurremo i seguenti: II, 11, 12 e 13; II, 34, 35 e III, 1; III, 2, 3 e 4; V, 15, 16 e 17; V, 18, 19 e 19'; V, 19'', 19''' e 20.

Tuttavia — bisogna notarlo — Diofanto non considera sempre tutti tre i sistemi di ogni terna, come provano le coppie seguenti che sarebbe agevole il completare: II, 20 e 21; II, 22 e 23; II, 24 e 25; II, 26 e 27; II, 28 e 29; II, 32 e 33; III, 8 e 9; III, 10 e 11; III, 12 e 13; III, 14; III, 15 e 16; III, 17 e 18; IV, 16 e 17; IV, 22 e 23; IV, 29 e 30; V, 1 e 2; V, 3 e 4; V, 27 e 28.

Altri criterî di analogia fecero trattare di seguito le seguenti quaterne di equazioni: I, 31, 32, 33 e 34; I, 35, 36 assieme a due contenute nel corollario del problema I, 38; I, 37, 38 in uno ad altre due contenute nello stesso corollario; II, 1, 2, 4 e 5.

La catena che unisce le equazioni di ciascuna quaterna è messa in evidenza da un esame, anche superficiale, delle equazioni citate; essa è di tale natura che reca meraviglia il non trovare in seguito ai problemi I, 28 e 29 i due traducentisi nei sistemi seguenti:

$$x - y = 2d \quad , \quad x^2 + y^2 = 2q^2$$
$$x - y = 2d \quad , \quad x^2 - y^2 = 2q^2.$$

Tale osservazione, combinata con quella già fatta intorno alle terne incomplete di sistemi di equazioni, prova che Diofanto, nello scegliere i problemi da risolvere, non ha proceduto con criterî rigorosamente uniformi: a meno che non si ammetta che Diofanto lo abbia realmente fatto e che ogni divergenza da quella regola provenga da una lacuna nei manoscritti. Ora questa supposizione ci sembra talmente arbitraria che non ci saremmo nemmeno arrestati a farne cenno ove non avessimo riflettuto che taluno potrebbe credere che Fermat l'abbia applicata in qualche caso, che, in particolare, abbia suggerita una reintegrazione all'*Aritmetica* di Diofanto, quando (1) annettè alle coppie

VI 8 e 9 ; VI 10 e 11 ; VI 12 e 13

risp. le equazioni seguenti

$$x + y - \frac{1}{2}xy = a \quad ; \quad x + z - \frac{1}{2}xz = a \quad ; \quad x - \frac{xy}{2} = u^2 \quad , \quad y - \frac{xy}{2} = v^2 .$$

Aggiungasi che quella supposizione è estremamente pericolosa per le conseguenze a cui condurrebbe se venisse applicata in tutta la sua estensione: infatti se si completassero tutti i gruppi imperfetti dell'*Aritmetica* di Diofanto, si otterrebbe un'opera, certamente più consona alle esigenze della scienza moderna, ma così disforme da quella che si legge in tutti i manoscritti conosciuti, da non potere ragionevolmente recare il nome dello scienziato che studiamo.

46. I metodi con cui Diofanto risolve le equazioni in cui s'imbatte non sono da lui esposti in generale (2), ciò che indusse l'Hankel a negarne persino l'esistenza (3); ma che si trovino allo stato latente è dimostrato ad evidenza dallo studio accurato delle varie classi di problemi trattati nell'*Aritmetica,* quale è quello che fece già il Nesselmann (4), quale è quello che noi ora imprendiamo, guidati però da altri criterî. Prima di entrare in materia osserviamo che nel riferire le soluzioni di Diofanto noi (come facemmo redi-

---

(1) *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 329 e T. III, p. 266.

(2) Onde non si può dire, come fa il Gow (op. cit., p. 105), che l'*Aritmetica* di Diofanto sia « a treatise on algebra ».

(3) Op. cit., p. 164.

(4) *Die Algebra der Griechen*. Cap. IX.

gendo l'*Elenco* dianzi riferito) surrogheremo i numeri dati con costanti letterali; ciò non altera in alcun modo l'essenza delle cose perchè (ben lo sa chi abbia letto l'*Aritmetica*) i ragionamenti ivi adoperati sono sempre indipendenti dai numeri a cui sono applicati; se egli li espone sotto forma particolare è probabilmente perchè non disponeva di una simbolica somigliante a quella da lui usata per designare le incognite (v. N. 43).

Per trattare i problemi che si traducono in equazioni di I grado con un'incognita (1) (v. Libro I, probl. 7-11 e 39) basta applicare le regole di trasformazione e riduzione delle equazioni insegnate da Diofanto nell'esordio della sua opera, come vedemmo dianzi; così egli procede, aggiungendo in fine una verifica dei risultati. Fra tutti quei problemi il più notevole è l'ultimo, su cui crediamo bene di arrestarci un istante. Eccone anzitutto l'enunciato: " Dati due numeri a e $b < a$, trovarne un terzo x tale che moltiplicando ciascuno dei tre numeri a, b, x per la somma degli altri due si ottengano tre prodotti equidifferenti ". Per risolverlo nel modo di Diofanto osserviamo che, dei tre prodotti

$$(a+x)b \quad , \quad (b+x)a \quad , \quad (a+b)x$$

di cui parla il problema, il primo è minore del secondo dal momento che $b < a$, onde, riguardo alla loro grandezza relativa, non possono presentarsi che i tre casi seguenti:

$$\begin{gathered}(a+b)x < (a+x)b < (b+x)a \\ (a+x)b < (a+b)x < (b+x)a \\ (a+x)b < (b+x)a < (a+b)x.\end{gathered}$$

In corrispondenza, come equazione del problema, si ottiene una delle tre seguenti:

$$\begin{gathered}(a+b)x + (b+x)a = 2(a+x)b \\ (a+x)b + (b+x)a = 2(a+b)x \\ (a+x)b + (a+b)x = 2(b+x)a\end{gathered}$$

dalle quali si ricava:

$$x = \frac{ab}{2a-b} \quad , \quad x = \frac{2ab}{a+b} \quad , \quad x = \frac{ab}{2b-a}.$$

(1) Sono gli stessi che gli Egiziani risolvevano col loro calcolo *Hau*. (Cantor, *Vorlesungen*, I Bd., 2ª Aufl. Leipzig 1894, p. 37).

Ora, siccome queste relazioni equivalgono alle seguenti

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{x} \quad , \quad \frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \quad , \quad \frac{2}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{x} \, ,$$

così è evidente essere il problema aritmetico considerato equivalente al problema geometrico seguente: costruire un gruppo armonico $OABX$ di cui sono noti tre elementi O, A, B, nelle tre ipotesi X conjugato a A, X conjugato a O, X conjugato a B; se tal fatto sia stato avvertito da Diofanto è probabile, non certo.

Notisi che, essendo $a>b$, i due primi valori trovati per x sono sempre positivi, il terzo lo è soltanto se $2b>a$: i valori $a=5$, $b=3$ scelti da Diofanto soddisfanno a tale condizione, circostanza analoga a molteplici altre (v. p. es. N. 48) e che attesta in lui delle cognizioni aritmetiche superiori a quelle visibili immediatamente.

Passando ai sistemi determinati di equazioni lineari, osserveremo che Diofanto, in ogni caso riduce la questione alla determinazione di una sola incognita; è in sostanza il procedimento che adoperiamo noi pure; ma, mentre per noi è un semplice artificio di calcolo, pel geometra greco è un' imprescindibile necessità, dal momento che la sua simbolica non comporta che la presenza di una incognita per volta (v. n. 43). La riduzione indicata viene di frequente eseguita col notissimo metodo di sostituzione, ma molto spesso Diofanto preferisce invocare l'ajuto di un' incognita ausiliare, come si vede dagli esempî seguenti.

Nel problema I, 5 (1) egli prende come incognita principale $\xi=\frac{x}{m}$; ottiene in conseguenza $x=m\xi$, $y=n(b-\xi)$ e per determinare ξ la equazione $m\xi+n(b-\xi)=a$. Analogamente nel problema II, 18.

Nel problema I, 15 l'incognita principale è $y=\xi+a$, quindi si ha $x=\alpha\xi+a$ e per determinare ξ la equazione $\xi+a+b=\beta(\alpha\xi+a-b)$.

Nel problema I, 16 Diofanto assume per incognita principale la somma ω dei tre numeri incogniti; questi in conseguenza varranno risp. $\omega-a$, $\omega-b$, $\omega-c$ e per determinare ω servirà l'equazione $\omega=(\omega-a)+(\omega-b)+(\omega-c)$. Similmente nel probl. I, 17.

(1) Il lettore troverà le equazioni relative ai problemi citati nell' *Elenco* esposto nel n. 44.

Per risolvere il problema I, 18 nulla di meglio che addizionare due a due le equazioni date, ma questo metodo non è applicabile al problema analogo I, 19; invece Diofanto si serve di un' incognita ausiliare ω, che è la semisomma dei numeri cercati, questi allora sono espressi come segue: $\omega - \frac{a}{2}, \omega - \frac{b}{2}, \omega - \frac{c}{2}$, e per determinare ω si ha l'equazione $\omega = \left(\omega - \frac{a}{2}\right) + \left(\omega - \frac{b}{2}\right) + \left(\omega - \frac{c}{2}\right)$. In modo somigliante si tratta il problema successivo.

47. Meno solido terreno si trova sotto i piedi colui che si accinge a studiare le equazioni di secondo grado in Diofanto. Moltissime di tali equazioni sono risolute; ma quali erano le considerazioni teoriche di cui egli si serviva? Egli non lo dice, sicchè per rispondere a tale domanda si è costretti ad invocare qualche elemento ipotetico.

Ora se si considera che nell' unica opera teorica che possediamo (l' opuscolo *Sui numeri poligonali*) Diofanto adopera abilmente l' algebra geometrica, della quale inoltre fa uso nella soluzione del problema V, 10, e che del procedimento algebrico-geometrico per risolvere le equazioni quadratiche si giovarono tutti coloro che vanno considerati come immediati discepoli di Diofanto; sembra essere inevitabile concludere che il metodo da lui usato fosse nella sostanza identico a quello che già incontrammo negli *Elementi* (L. II, n. 15) di Euclide. Onde a tale conseguenza, che già riscosse l'approvazione della generalità degli storici (1), noi pure facciamo adesione. Riteniamo poi che per risolvere l' equazione

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

e gli si servisse di quel procedimento che adoperarono sempre gli Indiani (2) e gli Arabi (3); che cioè quell' equazione moltiplicasse

(1) Cossali, op. cit., T. I, p. 91; Nesselmann, op. cit., p. 328; P. Tannery, *De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide* (Mém. de Bordeaux, II Série, T. IV, p. 396-416), § III; L. Rodet, *L'algèbre d' Al-Khârizmi et les méthodes indienne et grecque* (Journal Asiatique, VIII Série. T. 8.°, 1878), p. 13; ecc. — Hankel (op. cit., p. 162) è invece di parere opposto; per lui Diofanto è un aritmetico non invocante mai l' ajuto della geometria.

(2) Colebrooke, op. cit., p. 347.

(3) Cfr. Cantor, *Vorlesungen*, T. I, p 725-6 della 2.ª ediz.

per a e ne deducesse l'altra

$$\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}-c\ ;$$

per potere proseguire dev'essere $\frac{b^2}{4}-c$ eguale ad un quadrato (1), cioè $\frac{b^2}{4}$ dev'essere superiore a c e la differenza dev'essere il quadrato di un intero o di una frazione (2). In tale ipotesi dalla equazione ultima scritta si trae con un'estrazione di radice

$$ax+\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$$

e poi trasportando

$$x=\frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}}{a}\ .$$

Questa è la forma di soluzione delle equazioni quadratiche che Diofanto, con ogni probabilità, adoperava in ogni circostanza. Che egli poi abbia considerate separatamente le sei forme

$$ax^2=bx\quad,\quad ax^2=c\quad,\quad bx=c$$
$$ax^2+bx=c\quad,\quad ax^2+c=bx\quad,\quad bx+c=ax^2\ ,$$

che si ritennero classiche dagli Arabi (3) e dagli algebristi vissuti dopo il Rinascimento, non è certo, ma è probabile, se non altro perchè l'*Aritmetica* offre esempî di tutte quelle sei forme.

Non meno importante della ricerca del metodo con cui risolve un'equazione quadratica è la questione: conobbe egli le due radici di una tale equazione, almeno nel caso in cui sono entrambe positive? Il Nesselmann la risolse negativamente (4), senza però ad-

(1) V. Diofanto ed. Tannery, T. I, p. 444.

(2) Il Cantor, interpretando diversamente le parole di Diofanto, si stupisce che questi sopprima la prima parte di tale condizione (*Vorlesungen*, T. I, 2.ª ed., p. 443).

(3) Cfr. Cantor, *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed.), p. 676.

(4) Op. cit., p. 353.

durre alcun argomento giustificante tale attitudine; sicchè il Cantor (1) con ragione osservò che la risposta desiderata doveva trarsi, non già da considerazioni aprioristiche, ma dall' esame di tutti quei problemi trattati da Diofanto che si traducono in equazioni quadratiche.

Per vedere a quali conseguenze mena tale esame, cominciamo dall' escludere le seguenti equazioni:

IV, 31: $5x^2 - 3x - 18 = 0$

IV, 39 $x^2 - 3x - 9 = 0$

V, 29: $x^2 - 5x - 60 = 0$; $x^2 - 8x - 60 = 0$

VI, 6 e 7: $84x^2 \pm 7x - 7 = 0$

VI, 8 e 9: $630x^2 \pm 73x - 6 = 0$

VI, 10 e 11: $630x^2 \pm 81x - 4$,

perchè tutte, presentando una sola variazione di segno, hanno una sola radice positiva epperò sono inconcludenti pel nostro scopo. Due variazioni invece presenta l' equazione

$$\text{VI, 24:}\ 172x = 336x^2 + 24,$$

ma Diofanto, appena incontratala, l' abbandona (2) perchè non ha radici razionali. Altre equazioni quadratiche fornite di due radici positive s' incontrano in alcuni passi importantissimi (3) dell' *Aritmetica* ove egli tratta, forse per primo, le diseguaglianze, passi sui quali bisogna fermarsi.

Per giudicarne il valore ricordiamo che, se α e $\beta < \alpha$ sono le radici dell' equazione

$$x^2 + px + q = 0,$$

affinche sia

$$x^2 + px + q > 0 \tag{1}$$

dev' essere

$$x < \beta \quad \text{oppure} \quad x > \alpha, \tag{I}$$

(1) Ivi p. 446.

(2) Diofanto ed. Tannery, T. I, p. 444.

(3) Da essi risulta, fra l' altro, che il nostro autore era in grado di calcolare per appressimazione le radici irrazionali delle equazioni quadratiche.

mentre affinchè sia

$$(2) \qquad x^2 + px + q < 0$$

dev' essere

$$(\mathrm{II}) \qquad \beta < x < \alpha.$$

Anzi, se si chiamano $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ dei numeri tali che si abbia

$$\beta_1 < \beta < \beta_2 < \alpha_2 < \alpha < \alpha_1 ,$$

affinchè la (1) sia soddisfatta basta che si abbia

$$(\mathrm{I}') \qquad x \leqq \beta_1 \quad \text{oppure} \quad x \geqq \alpha_1 ,$$

e affinchè lo sia la (2) basta che si abbia

$$(\mathrm{II}') \qquad \beta_2 \leqq x \leqq \alpha_2 ;$$

le (I', II') saranno da preferirsi alle (I, II) quando α e β sono irrazionali. Entrambi i tipi (1) e (2) di diseguaglianze si incontrano nel problema V, 10 ove Diofanto deve determinare per x un valore tale che si abbia

$$(3) \qquad \frac{17}{12} < \frac{6x}{x^2+1} < \frac{19}{12} ,$$

tale cioè che siano soddisfatte le due diseguaglianze

$$19x^2 - 72x + 19 > 0 \quad , \quad 17x^2 - 72x + 17 < 0$$

Ora le radici del trinomio $19x^2 - 72x + 19$ essendo $\dfrac{36 \pm \sqrt{935}}{19}$, si può porre

$$\alpha_1 = \frac{67}{19} \quad , \quad \beta_1 = \frac{5}{19}$$

e la prima diseguaglianza è soddisfatta se

$$(4) \qquad x \geqq \frac{67}{19} \quad \text{oppure} \quad x \leqq \frac{5}{19} ;$$

invece, del trinomio $17x^2 - 72x + 17$ le radici sono $\dfrac{36 \pm \sqrt{1007}}{17}$, quindi si può supporre

$$\alpha_2 = \frac{67}{17} \quad , \quad \beta_2 = \frac{5}{17}$$

e la seconda diseguaglianza è soddisfatta se

$$(5) \qquad \frac{5}{17} \leqq x \leqq \frac{67}{17} .$$

Ne viene che la limitazione (3) sarà soddisfatta se lo saranno le (4) e (5) simultaneamente, cioè se si avrà:

$$\frac{67}{19} \leqq x \leqq \frac{67}{17} .$$

È la conclusione a cui giunge Diofanto (1); siccome per ottenerla si adoperarono soltanto le radici dei trinomî di secondo grado corrispondenti al radicale positivo, così tale ricerca projetta poca luce sulla questione se il geometra greco abbia conosciute anche le altre. Più utile torna la limitazione

$$(6) \qquad 22x < x^2 + 60 < 24x$$

che s' incontra risolvendo il problema V, 30. Ora se si considera che le radici del trinomio $x^2 - 22x + 60$ sono $11 \pm \sqrt{61}$ si vedrà che affinchè risulti $x^2 - 22x + 60 > 0$ basta che si abbia

$$x \leqq 3 \quad \text{oppure} \quad x \geqq 19 ;$$

se si osserva invece che le radici del trinomio $x^2 - 24x + 60$ sono $12 \pm \sqrt{84}$ si vedrà che affinchè risulti $x^2 - 24x + 60 < 0$ dev' essere

$$3 \leqq x \leqq 21 .$$

Combinando questi risultati si vede che la (6) è soddisfatta se $x = 3$ oppure se

$$19 \leqq x \leqq 21 ;$$

la prima maniera emerge dalla considerazione delle radici date dai *radicali negativi,* la seconda invece dalla considerazione delle radici a *radicali positivi;* la prima, a parità di tutte le altre circostanze, è evidentemente preferibile, dando per x un valore più piccolo; Diofanto invece preferisce la seconda ed assume $x = 20$. Non è forse

(1) Diofanto ed. Tannery, p. 342, ove però invece di $\frac{67}{19}$ sta $\frac{66}{19}$.

questa una valida ragione per far credere che egli non conoscesse se non le radici che si ottengono prendendo i radicali positivamente?... A conforto di tale conclusione (1) osserviamo che nell'*Aritmetica* si cerca indarno una relazione identica del tipo $(x-\alpha)(x-\beta)=$ $=x^2+px+q$ (α e β positivi), la quale avrebbe potuto porre Diofanto sulla strada della scoperta delle due radici di un' equazione quadratica (2).

48. La stessa varietà e genialità di espedienti che vedemmo (n. 46) adoperati da Diofanto per risolvere i sistemi determinati di equazioni lineari, si ritrova nella soluzione dei problemi in cui entrano equazioni di grado superiore. Tacendo dei sistemi binomî in cui una delle equazioni ha la forma $\frac{x}{y}=\mu$ (I, 31 e 38), i quali si riducono subito per sostituzione ad un' equazione unica (3), noteremo che nei problemi I, 27 e 28 Diofanto introduce come incognita ausiliaria la semidifferenza delle incognite e così giunge a ridurre il problema alla soluzione di un' equazione quadratica pura; altrettanto vien fatto nel problema seguente, certo per uniformità di procedimento, chè del resto assai meglio era notare che il relativo sistema equivale all'altro $x+y=2s$, $x-y=\frac{2q^2}{s}$ già risoluto (I, 1). La stessa incognita ausiliare serve a risolvere il problema IV, 1, mentre nei problemi I, 30 e IV, 2 serve assai bene la semidifferenza. Riguardo al problema IV, 1 osserviamo che, posto $x-y=2\xi$, si ha $x=b+\xi$ e $y=b-\xi$, onde la prima equazione del problema diviene $b^3+3b\xi^2=a$ e dà $\xi^2=\frac{a-b^3}{3b}$; scelti quindi ad arbitrio le costanti a e b, ξ è irrazionale e così lo sono x , y;

---

(1) Contro di essa non sta che una frase ambigua del matematico arabo Alkarchi rilevata dal Cantor (T. I, p. 725).

(2) In Diofanto-Tannery, T. I, p. 274 è eseguito il prodotto $\left[\frac{7}{3}x-1\right](x+1)$ e a p. 438 il prodotto $(4x+2)(x+1)$, ma questi non sono del tipo indicato; invece a p. 286 è eseguito il prodotto $(x-3)$ $(x-4)$ ma incidentalmente per ottenere il denominatore della frazione che nasce dalla moltiplicazione di due altre.

(3) È forse per attenersi ad un procedimento uniforme che Diofanto non utilizzò la circostanza che le seconde equazioni dei problemi I, 33 e 34 sono riducibili alle forme $x\mp y=\nu$, mentre la seconda del problema I, 36 dà subito $y=\nu$?

Diofanto però prende $a = 185$ e $b = 5$, così ha $\xi = 2$, e mostra incidentalmente di sapere *determinare due numeri* a, b *tali che* $\frac{\mathrm{a} - \mathrm{b}^3}{3\mathrm{b}}$ *risulti un quadrato.*

Osservazioni congeneri alle precedenti possono farsi riguardo ai sistemi con tre incognite. Quando è possibile Diofanto adopera il metodo di sostituzione (1), ma non dimentica che un'incognita ausiliare opportunamente scelta è di inestimabile utilità. Prendiamo ad esempio il prob. IV, 37 in cui Diofanto elegge come incognita principale la somma $x + y + z = \omega$; allora può scrivere $x = \frac{c\omega}{x}$, $z = \frac{a\omega}{y}$ e dedurre $y^2 = \frac{ac}{b}\,\omega$. Pone quindi $\omega = \frac{ac}{b}\,\xi^2$ e può in conseguenza sostituire alle equazioni che precedono le seguenti:

$$x + y + z = \frac{ac}{b}\xi^2 \quad , \quad y = \frac{ac}{b}\xi \quad , \quad x = c\xi \quad , \quad z = a\xi$$

da cui, eliminando x , y , z, deduce:

$$\xi = \frac{bc + ea + ab}{ac}$$

e quindi

$$x = \frac{bc + ca + ab}{a} \quad , \quad y = \frac{bc + ca + ab}{b} \quad , \quad z = \frac{bc + ca + ab}{c}$$

In altre circostanze Diofanto ricorre ad artifici ancor più riposti. Così nel problema IV, 15 egli assume per incognita principale z e quindi scrive la terza delle equazioni date, così $x + y = \frac{c}{z}$ pone quindi $x = \frac{\alpha}{z}$, $y = \frac{\beta}{z}$, α e β essendo costanti da determinare.

---

(1) P. es. nel Lemma al prob. V, 8 ricava dalla equazione prima e terza

$$z = \frac{a^2}{y} \quad , \quad x = \frac{c^2}{y} \; ,$$

valori che sostituiti nella seconda la trasformano in

$$b^2 = \frac{a^2c^2}{y^2} \; ;$$

similmente nel Problema IV, 36.

Fra esse sussiste la relazione $\alpha+\beta=c$. Sostituendo poi quei valori di x, y nelle prime due equazioni date ottiene

$$\frac{\alpha\beta}{z^2}+\alpha=a \quad , \quad \frac{\alpha\beta}{z^2}+\beta=b,$$

per la cui coesistenza dev' essere $\alpha-\beta=a-b$. Questa condizione, assieme alla precedente $\alpha+\beta=c$ dà

$$\alpha=\frac{a-b+c}{2} \quad , \quad \beta=\frac{-a+b+c}{2},$$

onde:

$$z=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{a-\alpha}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{2(a+b-c)}},$$

$$x=\frac{\alpha}{z}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2(-a+b+c)}} \quad , \quad y=\frac{\beta}{z}=\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a+b-c)}{2(a-b+c)}}.$$

Il procedimento testè riferito, benchè un po' indiretto, non sarebbe indegno di prendere posto in un trattato moderno. Si noti che, affinchè x, y, z risultino razionali, a, b, c devono essere tali che si abbia, indicando con α, β, γ tre interi qualunque,

$$-a+b+c=2\beta\gamma \quad , \quad a-b+c=2\gamma\alpha \quad , \quad a+b-c=2\alpha\beta,$$

cioè

$$a=\alpha(\beta+\gamma) \quad , \quad b=\beta(\gamma+\alpha) \quad , \quad c=\gamma(\alpha+\beta),$$

fatto che probabilmente non rimase sconosciuto al geometra greco, le cui ipotesi ($a=27$, $b=32$, $c=35$) corrispondono ai valori $\alpha=3$, , $\beta=4$, $\gamma=5$.

Non meno notevole è la via battuta da Diofanto nel risolvere i problemi IV, 34 e 35; lo è tanto che non sappiamo resistere alla tentazione di riprodurne qui il tracciato. Le equazioni del primo fra i citati problemi possono scriversi come segue:

$$(y+1)(z+1)=1+a^2 \quad , \quad (z+1)(x+1)=1+b^2 \quad , \quad (x+1)(y+1)=1+c^2,$$

onde, se si prendono per incognite le quantità $x+1$, $y+1$, $z+1$, si ricade nel sistema di equazioni trattato nel lemma al prob. V, 8. Benchè Diofanto non abbia effettuata tale riduzione, pure egli ha intuito che la questione proposta si semplifica fissando la propria attenzione su quelle somme; egli prese infatti per incognita principale

$\xi = y + 1$ e trasformò così la prima e la terza delle equazioni date nelle seguenti:

$$x = \frac{c^2}{\xi} - 1 \quad , \quad z = \frac{a^2}{\xi} - 1 \quad ;$$

la seconda diviene quindi

$$\frac{a^2 c^2}{\xi^2} = b^2$$

e dà $\xi = \frac{ac}{b} \cdot$ In conseguenza $x = \frac{bc}{a} - 1\,, y = \frac{ca}{b} - 1\,, z = \frac{ab}{c} - 1.$

Prima di passare allo studio dei problemi di analisi indeterminata trattati da Diofanto, rileviamo la seguente equazione cubica

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3$$

di cui a ragione egli dice che $x = 4$ è una radice (1). Come le ottenne?... Probabilmente (2) servendosi delle regole da lui insegnate per trasformare e ridurre qualsia equazione algebrica razionale; infatti applicandole si muta quell' equazione nella seguente

$$x^3 + x = 4x^2 + 4$$

la quale, scritta sotto la forma

$$x(x^2 + 1) = 4(x^2 + 1)$$

mette in evidenza la radice $x = 4$.

49. Da quanto esponemmo nei tre numeri precedenti scaturisce che nel trattare i problemi determinati Diofanto procede in modo sostanzialmente identico a quello oggi in uso. Ben diversamente accade per quanto concerne l' analisi indeterminata. Infatti, mentre per noi risolvere un problema non pienamente determinato significa trovare l' espressione generale dei numeri *interi* che soddisfanno alle condizioni assegnate (3), Diofanto in generale si contenta di trovare

---

(1) Diofanto ed. Tannery, T. I, p. 66.

(2) Cossali op. cit., T. I, p. 75 e Schulz p. 589 dalla sua traduzione di Diofanto. La proposta divinazione non fu approvata dal Cantor (*Vorlesungen*, I, p. 447).

(3) Le condizioni di essere intere le soluzioni si trova osservata dagli aritmetici Indiani, primo Bhâskara.

un numero razionale e positivo soddisfacente la questione, od un gruppo di tali numeri, se questa comprende parecchie incognite; tutte le altre soluzioni (le immaginarie come le irrazionali e le negative) sono considerate come impossibili (ἀδύνατα (1)) od assurde (ἄτοπα (2)). Che in origine i Greci si siano proposti di ottenere soluzioni generali (di esprimere, cioè, le incognite in funzioni razionali di certe quantità ausiliarie), e che poi, vinti dalle difficoltà, si siano acquetati al raggiungimento di quelle speciali, è opinione del Tannery (3) che nessun documento suffraga. Altrettanto dicasi dell'ipotesi di Heath (4), che Diofanto abbia escluse le soluzioni irrazionali perchè non disponeva di alcun mezzo per indicare i numeri che razionali non sono.

Per Diofanto evidentemente non esiste il problema fondamentale dell'odierna analisi indeterminata di primo grado; ma egli è in grado di dare di ogni problema non determinato la soluzione che comportano le sue idee. Data, infatti, un' equazione del tipo $ax + by + c = 0$, a qualunque valore razionale di x corrisponde un valore razionale di y, $y = \frac{c - ax}{b}$, il quale è positivo purchè x si prenda inferiore a $\frac{c}{a}$; onde nulla di più facile del trovare una soluzione (nel senso diofanteo) di quella equazione.

In conseguenza il nostro metematico non tratta che incidentalmente (v. I, 14 e Lemmi a IX, 34 e 35) speciali problemi traducibili immediatamente in un' equazione della forma suindicata. Ma invece si occupa *ex professo* di questioni che dànno luogo a sistemi di n equazioni con $n+1$ incognite; e le tratta col ridurle determinate assumendo ad arbitrio il valore di una delle incognite, oppure una relazione fra queste. Così nei problemi I: 14, 22 e 23 assume per y un certo valore e deduce quelli delle altre incognite; nel problema I, 24 sceglie di sua volontà il valore di $y+z$ e nel successivo quello di $y+z+u$, mentre nel problema II, 17 elegge siccome nuovo dato il rapporto $\frac{x}{y}$. Va notato che certi sistemi diofantei

(1) Diofanto ed. Tannery, T. I, p. 250, lin. 15.

(2) Id., p. 312, lin. 18.

(3) *Études sur Diophante* (*Bibl. math.*, 1887, p. 82).

(4) Op. cit., p. 82.

(I, 22-25) sono omogenei, epperò divengono determinati considerando i rapporti di tutte meno una le incognite alla rimanente (1); Diofanto non effettua tale riduzione, ma si giova dell' omogeneità per dedurre da una soluzione razionale una soluzione intera. Una menzione speciale va fatta dei lemmi ai problemi IV, 34 e 35, i quali hanno per iscopo di trovare l' " espressione generale " dei numeri soddisfacenti una delle equazioni $xy \pm (x+y) = a$; per raggiungere questo intento Diofanto non trasforma queste equazioni nelle due altre $(x \pm 1)(y \pm 1) = a + 1$, per ridurre il problema alla ricerca dei fattori maggiori di 1 del numero $a+1$, ma attribuisce ad una delle incognite (x per esempio) un valore speciale, ricava il corrispondente valore di y, e poi indaga la genesi del risultato per scoprire come questo muti al variare di x. Tale procedimento è assai comune in Diofanto, ma è così caratteristico e così poco noto ai moderni che è bene chiarirne la natura col riferire le parole stesse da lui adoperate:

Trovare due numeri in termini generali (ἐν τῷ ἀορίστῳ), *tali che il loro prodotto più la loro somma faccia un dato numero.*

Il numero dato sia 8. Si ponga: I numero cercato $= x$, II $= 3$; sarà I . II + I + II $=$ $= 4x + 3$. Onde $4x + 3 = 8$, $x = \frac{5}{4}$ e I $= \frac{5}{4}$, II $= 3$. Considero ora in qual modo x risulta eguale a $\frac{5}{4}$. Questo numero è il quoziente di 5, eccesso di 8 su 3, per 4, che è 3 aumentato di 1. Perciò se al II dei dati numeri attribuiamo un valore qualunque x, per avere il valore del I basterà dividere per $x+1$ l'eccesso di 8 sopra x. Ponendo ad esempio II $= x - 1$, sarà $8 -$ II $= 9 - x$ e quindi il I $= \frac{9-x}{x} = \frac{9}{x} - 1$. Tale è la soluzione in termini generali della questione: prodotto più somma eguale a 8. La soluzione è in termini generali perchè comunque si scelga x si ottiene una soluzione.

50. Importanza ancora maggiore possiede quella parte dell' *Aritmetica* di Diofanto che si riferisce all' analisi indeterminata di grado superiore al primo. Taccio dei problemi II: 1, 2, 4 e 5 che si trasformano in determinati (e precisamente nei problemi I, 31-34) assumendo ad arbitrio il valore del rapporto $\frac{y}{x}$: essi si ritengono

(1) V. ad es. il sistema IV 33 il quale ha per soluzione

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha+1}{\beta+1}\ ,\quad z = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\alpha\beta-1}\ .$$

interpolati, al pari dei problemi II, 3 (similmente riducibile a quello contemplati nel corollario alla prop. I 34) e II, 7 (che è trasformabile in I, 1 prendendo a capriccio la differenza $x - y$). Arrestiamoci invece un momento sui problemi II: 8, 9, 10 i quali hanno per iscopo di " decomporre in due quadrati un quadrato dato o la somma di due quadrati, oppure di trovare due quadrati di cui sia nota la differenza ". Per risolvere questi problemi — che furono certamente ispirati dalle investigazioni di Pitagora e Platone esposte nei nn. 21 e 27 — egli sfrutta il seguente concetto generale: esprime i lati dei due quadrati ignoti in funzione razionale di certe costanti arbitrarie $\lambda, \mu, \ldots$ e di una variabile indipendente ξ scelta in modo che, in forza delle condizioni del problema, soddisaccia ad un'equazione lineare; risolta questa, i lati ignoti saranno razionali. In qual modo Diofanto applichi questo concetto ai problemi citati emerge dalle seguenti formole, che esprimono le soluzioni da lui esposte.

II, 8: $x^2 + y^2 = a^2$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} x = \xi \\ y = \lambda\xi - a \end{array}\right\} x^2 + y^2 = \xi^2 + \lambda^2\xi^2 - 2a\lambda\xi + a^2 = a^2 \quad , \quad \xi = \frac{2a\lambda}{1+\lambda^2}$$

Soluzione:

$$x = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1} a \quad , \quad y = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2+1} a$$

II, 9: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda\xi - a \\ y = \mu\xi - b \end{array}\right\} x^2 + y^2 = (\lambda^2+\mu^2)\xi^2 - 2(\lambda a + \mu b)\xi + a^2 + b^2 = a^2 + b^2 \ , \ \xi = 2\frac{\lambda a + \mu b}{\lambda^2 + \mu^2}$$

Soluzione:

$$x = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)\, a + 2\lambda\mu b}{\lambda^2 + \mu^2} \quad , \quad y = \frac{(\mu^2 - \lambda^2)\, b + 2\lambda\mu a}{\lambda^2 + \mu^2}$$

II, 10: $x^2 - y^2 = d$

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda + \xi \\ y = \xi \end{array}\right\} x^2 - y^2 = \lambda^2 + 2\lambda\xi = d \quad , \quad \xi = \frac{d - \lambda^2}{2\lambda}$$

---

(1) Questo problema ha suggerito a Fermat il suo celebre teorema sull'impossibilità della equazione $x^n + y^n = z^n$ (*Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 291 e T. III, p. 241). Il caso particolare $n = 3$ era già stato almeno intuito dagli Arabi; v. Cantor, *Vorlesungen*, T. I (2.ª ed.), p. 708 e 740.

(2) La questione analoga per due cubi fu enunciata e risolta da Fermat (*Oeuvres*, T. I, p. 297 e T. III, p. 246).

Soluzione:

$$x = \frac{d + \lambda^2}{2\lambda} \quad , \quad y = \frac{d - \lambda^2}{2\lambda} \text{ (1)}$$

Oltre il concetto surriferito — del quale potremmo citare molte altre applicazioni — nell'*Aritmetica* di Diofanto ne campeggia un altro non meno ampio e fecondo; è il seguente: per risolvere in numeri razionali un sistema indeterminato, si esprimano alcune o tutte le incognite mediante tali funzioni di una indeterminata che tutte le equazioni date meno una o (se a tanto non si può giungere) tutte meno due siano soddisfatte: quell'indeterminata si determini poi razionalmente mediante la equazione o le equazioni escluse.

È chiaro che questa idea è suscettibile di infinitiformi applicazioni, e Diofanto se ne giova con abilità veramente ammirabile; se volessimo far conoscere tutti i geniali artifici mediante cui egli seppe rivolgere ai proprî fini quel concetto, dovremmo qui riferire la miglior parte dell'*Aritmetica;* ci limiteremo a quelli che ci sembrano i più cospicui, augurando che da essi emani tale seduzione che il lettore sia spinto a prendere diretta conoscenza di un'opera bellissima fra le belle che l'antica Grecia ci ha regalate.

$$\text{II, 11:} \quad a + x = u^2 \quad , \quad b + x = v^2$$

Si ponga $x = \xi^2 - a$; così sarà *ipso facto* soddisfatta la condizione che $a + x$ sia un quadrato; affinchè sia un quadrato anche $b + x = b + \xi^2 - a$, si scelga ad arbitrio un numero λ e si ponga $\xi^2 - a + b = (\xi - \lambda)^2$. Verrà $\xi = \dfrac{\lambda^2 + a - b}{2\lambda}$ ed il dato sistema di equazioni sarà risolto in numeri razionali.

Ammettono soluzioni analoghe i problemi II: 12 e 13.

$$\text{II, 14:} \quad y + z = a \quad , \quad y + x^2 = u^2 \quad , \quad z + x^2 = v^2$$

Scelti arbitrariamente due numeri μ, ν si ponga $x = \xi$, $y = 2\mu\xi + \mu^2$, $z = 2\nu\xi + \nu^2$; allora $y + x^2$ e $z + x^2$ saranno quadrati, cioè saranno soddisfatte le ultime due equazioni del problema, e la prima diverrà

(1) Questa si ottiene direttamente sostituendo alla equazione data le due seguenti:

$$x - y = \lambda \quad , \quad x + y = \frac{d}{\lambda} .$$

$2(\mu+\nu)\xi+\mu^2+\nu^2=a$ e ci darà $\xi=\frac{a-(\mu^2+\nu^2)}{2\mu\nu}$; x, y, z assumono in conseguenza valori razionali.

Similmente si può risolvere il problema II, 15.

II, 34: $x^2+(x+y+z)=u^2$, $y^2+(x+y+z)=v^2$, $z^2+(x+y+z)=w^2$.

Detta ξ una quantità da determinarsi e m una costante arbitraria, si ponga

$$(1) \qquad x+y+z=m\xi^2$$

e si decomponga m in tre modi differenti in due fattori:

$m=\alpha\alpha'=\beta\beta'=\gamma\gamma'$, ove si suppone, come è lecito, $\alpha>\alpha'$, $\beta>\beta'$, $\gamma>\gamma'$.

Facendo poi

$$(2) \qquad x=\frac{\alpha-\alpha'}{2}\xi \quad , \quad y=\frac{\beta-\beta'}{2}\xi \quad , \quad z=\frac{\gamma-\gamma'}{2}\xi \; ;$$
$$u=\frac{\alpha+\alpha'}{2}\xi \quad , \quad v=\frac{\beta+\beta'}{2}\xi \quad , \quad w=\frac{\gamma+\gamma'}{2}\xi$$

risulteranno soddisfatte tutte tre le equazioni date. Quanto a ξ, essa si determinerà eliminando $x, y\, z$ fra le equazioni (1) e (2); si ottiene così:

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha'+\beta'+\gamma')}{2}\xi=m\xi^2$$

onde

$$\xi=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha'+\beta'+\gamma')}{2m}.$$

Questo schema di soluzione può adattarsi ad altri problemi, quali sono: II, 35 e III: 1, 2, 3 e 4.

IV, 38.

Questo problema si enuncia a parole così: “ trovare tre numeri x, y, z la cui somma moltiplicata successivamente per ciascuno dia per prodotti risp. un numero triangolare, un quadrato ed un cubo ”.

Per risolverlo si noti che dalle tre equazioni

$$(x+y+z)x=t \quad , \quad (x+y+z)y=q \quad , \quad (x+y+z)z=c$$

si trae

$$t+q+c=(x+y+z)^2,$$

onde si vede facilmente che tutta la difficoltà del problema è ridotta a " trovare un numero triangolare, un quadrato ed un cubo la cui somma sia un quadrato ". Si ponga per ciò

$$(3) \qquad t + q + c = \xi^2 \quad , \quad q = (\xi - a)^2 \quad , \quad c = b^3 ,$$

e si otterrà

$$t = 2a\xi - a^2 - b^3 ;$$

se t risultasse un numero triangolare il problema sarebbe risolto. Ora affinchè ciò accada è necessario (v. n.° 37) e sufficiente che $8t+1$ sia un quadrato (1), onde porremo

$$(4) \qquad 8(2a\xi - a^2 - b^3) + 1 = (\lambda\xi + \mu)^2$$

Il valore di ξ soddisfacente a questa relazione non risulta razionale, ma tale risulterebbe se nel primo membro si trovasse a^2 invece di a e ξ^2 invece di ξ, e se nel secondo fosse $\lambda = 4a$; in conseguenza Diofanto pone, in luogo delle (3), le relazioni

$$(3') \qquad t + q + c = \xi^4 \quad , \quad q = (\xi^2 - a^2)^2 \quad , \quad c = b^3 ,$$

e quindi ottiene, per determinare ξ, l'equazione

$$(4') \qquad 8(2a^2\xi^2 - a^4 - b^3) + 1 = (4a\xi + \mu)^2 ;$$

donde si ha per ξ un valore razionale e quindi valori di tale specie anche per x, y, z. Non possiamo tacere che il problema potrebbe anche risolversi (anzi più semplicemente) conservando le equazioni (3) e surrogando la (4) con l'equazione:

$$8(2a\xi - a^2 - b^3) + 1 = \lambda^2$$

51. Per quanto pregevole sia il concetto di soluzione indicato nel n. prec., non è lecito negare che le conseguenti soluzioni non sono sempre le migliori immaginabili. Valga a provarlo il problema III 5. " Trovare tre numeri tali che sia un quadrato tanto

(1) Infatti da

$$(8t+1) = (2n+1)^2 \qquad \text{si trae} \qquad t = \frac{n(n+1)}{2} .$$

la loro somma quanto la differenza tra la somma di due qualunque fra essi ed il terzo „ (1). Per risolvere il quale Diofanto pone

$$x+y+z=(\xi+a)^2 \quad , \quad x+y-z=a^2 \quad , \quad -x+y+z=\xi^2 ,$$

e così tre delle equazioni del problema risultano soddisfatte; ora siccome da queste posizioni si trae

$$z=\frac{\xi^2+2a\xi}{2} \; , \; x=\frac{a^2+2a\xi}{2} \; , \; y=\frac{a^2+\xi^2}{2} \; , \; x-y+z=2a\xi ,$$

così per soddisfare all' equazione rimanente basta porre $2a\xi=k^2$, k essendo un numero qualunque. Il problema è così risoluto. Ma se si osserva che le tre ultime equazioni del problema addizionate dànno

$$x+y+z=u^2+v^2+w^2 ,$$

si vedrà che il problema può trattarsi molto più elegantemente così: Si scelgano tre numeri a, b, c i cui quadrati diano per somma un nuovo quadrato k^2, e si ponga

$$-x+y+z=a^2 \quad , \quad x-y+z=b^2 \quad , \quad x+y-z=c^2 ,$$

risulterà

$$x+y+z=k^2$$

e tutte le condizioni del problema saranno soddisfatte; il problema stesso ha dunque la seguente notevolissima soluzione

$$x=\frac{b^2+c^2}{2} \quad , \quad y=\frac{c^2+a^2}{2} \quad , \quad z=\frac{a^2+b^2}{2} .$$

---

(1) Lo stesso appunto è confermato dai problemi 15 e 16 del III libro. Nel primo di essi si tratta di rendere quadrati tre trinomî $yz+y+z$, $zx+z+x$, $xy+x+y$. Ora per ottenere ciò il modo più semplice è di procedere, non già come fece Diofanto, ma nel modo seguente: Le equazioni del problema si scrivano come segue:

$$(y+1)(z+1)=u^2+1 \quad , \quad (z+1)(x+1)=v^2+1 \quad , \quad (x+1)(y+1)=w^2+1.$$

Ora mediante il problema II, 10 si determinano tre coppie di quadrati la cui differenza sia 1:

$$a^2+1=A^2 \quad , \quad b^2+1=B^2 \quad , \quad c^2+1=C^2 .$$

Se allora si fa $u=a$, $v=b$, $w=c$, si trova (v. Lemma, V, 8)

$$x=\frac{BC}{A}-1 \quad , \quad y=\frac{CA}{B}-1 \quad , \quad z=\frac{AB}{C}-1 .$$

ed il problema è risolto. Similmente pel problema III, 16.

Essa pure si trova nell' *Aritmetica* di Diofanto, ma il Tannery inclina a considerarla per interpolata. A tale conclusione non guida alcuna considerazione intrinseca, perchè in mille occasioni Diofanto si è mostrato capace di escogitare delle soluzioni originalissime ed oltremodo eleganti; a convincerne il più scettico lettore bastano i due esempi seguenti:

III, 19.

Per " trovare quattro numeri x_1, x_2, x_3, x_4 tali che il quadrato della loro somma non cessi di essere un quadrato aggiungendovi o togliendovi ciascuno dei numeri dati ", Diofanto si giova dell' osservazione seguente: se al quadrato dell' ipotenusa di un triangolo rettangolo si aggiunge o si toglie il doppio dell' area, si ottiene un altro quadrato (cf. più avanti, n. 56). Ne viene che, considerando quattro triangoli rettangoli aventi per comune ipotenusa c e per cateti $a_1, b_1; .., a_4, b_4$, e ponendo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = c\xi \quad , \quad x_1 = 2a_1b_1\xi^2 \ , \ \dots \ , \ x_4 = 2a_4b_4\xi^2 \ ,$$

tutte le condizioni del problema saranno soddisfatte; dell' indeterminata ξ si troverà il valore eliminando le x fra queste cinque equazioni, ed infatti si ottiene

$$\xi = \frac{c}{2(a_1b_1 + \dots + a_4b_4)} \ .$$

Si vede che tutta la difficoltà del problema è ora concentrata nella determinazione di quattro triangoli rettangoli che abbiano l' ipotenusa comune. Per effettuarla si prendano (seguendo le tracce di Diofanto) due triangoli rettangoli in numeri: $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$, di cui γ e γ' siano le ipotenuse; saranno $\alpha\gamma', \beta\gamma', \gamma\gamma'; \alpha'\gamma, \beta'\gamma, \gamma'\gamma$ due triangoli rettangoli aventi $\gamma\gamma'$ per comune ipotenusa. Orbene, si noti che, essendo

$$(\gamma\gamma')^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) = (\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2 = (\alpha\alpha' + \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2,$$

le altre due coppie di numeri $|\alpha\alpha' - \beta\beta'|, \alpha\beta' + \alpha'\beta$ e $\alpha\alpha' + \beta\beta'$, $|\alpha\beta' - \alpha'\beta|$ misureranno i cateti di altri due triangoli rettangoli entrambi aventi $\gamma\gamma'$ per ipotenusa, epperò costituenti con i due precedenti la cercata quaterna di triangoli. Onde il problema proposto è risolto completamente e con piena generalità.

IV, 29: $(x^2 + y^2 + z^2 + u^2) + (x + y + z + u) = a$

Si scriva l'equazione proposta come segue:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 = a + 1$$

Ora, se $a+1$ è eguale alla somma di quattro quadrati $m^2+n^2+p^2+q^2$, eguagliando i numeri $x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}, x+, \frac{1}{2}$ ai numeri m, n, p, q si otterrà una soluzione del problema. Se invece $a+1$ è somma di tre quadrati $m^2+n^2+s^2$, decomponendo (v. probl. II, 8) s^2 in due quadrati p^2+q^2 si ricadrà nel caso precedente; se $a+1$ è la somma di due quadrati r^2+s^2, decomporremo tanto r^2 che s^2 nella somma di due quadrati e ci ritroveremo nelle ipotesi precedenti; similmente se $a+1$ è un quadrato. Onde il problema è risoluto in ogni caso.

Similmente si può sciogliere il problema IV, 30.

52. Nel corso della soluzione di parecchi problemi Diofanto s'imbatte nella seguente questione: „ date due funzioni algebriche razionali intere lineari o quadratiche di una variabile, determinare un valore razionale di questa tale che quelle funzioni divengano simultaneamente quadrati „. Il corrispondente sistema di equazioni è da Diofanto designato col nome di *equazione doppia* (διπλοισότης) e risoluto con metodo uniforme, ma soggetto ad incomode limitazioni: ciò spiega perchè il geometra greco ne faccia l'uso più parco ed insegni anzi come evitarlo e perchè Bachet de Meziriac abbia giudicato opportuno arrecarvi alcuni complementi.

Il caso che più di frequente s'incontra è quello in cui le due equazioni costituenti l'equazione doppia siano lineari. I loro primi membri hanno allora la forma: $a_1 x + b_1$, $a_2 x + b_2$. Non sempre una equazione doppia di tal fatta è risolubile (1), ma perciò è necessario fare sui coefficienti a, b delle ipotesi speciali. Frequentissima (v. II 11 e 13, III 12, 15 e 16, IV 32) è la supposizione che sia $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}$ ossia $a_1 = \sigma\lambda_1^2$, $a_2 = \sigma\lambda_2^2$. I primi membri delle equazioni proposte sono allora

$$\sigma\lambda_1^2 x + b_1 \quad , \quad \sigma\lambda_2^2 x + b_2 \ ;$$

(1) Diofanto ed. Tannery, T. I, p. 270.

e poichè (come Diofanto sa) i primi membri delle equazioni costituenti un'equazione doppia si possono sempre moltiplicare o dividere ciascuno per un quadrato arbitrario, così essi possono sostituirsi con i seguenti:

$$\rho x + \beta_1 \quad , \quad \rho x + \beta_2$$

ove

$$\rho = \sigma\lambda_1^2\lambda_2^2 \quad , \quad \beta_1 = b_1\lambda_2^2 \quad \text{e} \quad \beta_2 = b_2\lambda_1^2 .$$

Si supponga, per fissare le idee, $\beta_1 > \beta_2$, si formi la differenza $\beta_1 - \beta_2$ e la si decomponga in due fattori m, n (1); osservando che in conseguenza è

$$\beta_1 - \beta_2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 ,$$

si vedrà che le due seguenti equazioni

$$\rho x + \beta_1 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \quad , \quad \rho x + \beta_2 = \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$$

sussistono simultaneamente e dànno per x lo stesso valore razionale

$$x = \frac{1}{\rho}\left\{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \beta_1\right\} = \frac{1}{\rho}\left\{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 - \beta_2\right\} :$$

ciò prova che ad ogni decomposizione in due fattori della differenza $\beta_1 - \beta_2$ è annessa una soluzione della doppia equazione considerata.

Un altro caso in cui Diofanto risolve (IV, 39) una equazione doppia è quello in cui b_1 e b_2 siano quadrati. Posto $b_1 = \sigma^2\mu_1^2$, $b = \sigma^2\mu_2^2$, le due equazioni proposte, previamente divise per μ_1^2 e μ_2^2, hanno i loro primi membri della forma: $\lambda_1 x + \sigma^2$, $\lambda_2 x + \sigma^2$. Supponendo $\lambda_1 > \lambda_2$ se ne formi la differenza; osservando essere

$$(\lambda_1 - \lambda_2)x = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4\sigma}x + \sigma\right)^2 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4\sigma}x - \sigma\right)^2 ,$$

si vedrà che, se si sceglie x in modo che sia

$$\lambda_1 x + \sigma^2 = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4\sigma}x + \sigma\right)^2 ,$$

(1) Si ponga ad esempio:

$$m = \frac{p}{q}(\beta_1 - \beta_2) \quad , \quad n = \frac{q}{p} .$$

risulterà

$$\lambda_2 x + \sigma^2 = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4\sigma} x - \sigma \right)^2 ,$$

cioè la doppia equazione sarà verificata, x avendo il valore (razionale)

$$\frac{8(\lambda_1 + \lambda_2)\sigma^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} .$$

Per risolvere la stessa doppia equazione con maggiore generalità Diofanto suggerisce il seguente procedimento: Si ponga

$$\lambda_1 x + \sigma^2 = (y + \sigma)^2 ,$$

così la prima equazione sarà soddisfatta dal valore razionale

$$x = \frac{y^2 + 2\sigma y}{\lambda_1} ;$$

è in conseguenza

$$\lambda_2 x + \sigma^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (y^2 + 2\sigma y) + \sigma^2 ;$$

si ponga ora

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} (y^2 + 2\sigma y) + \sigma^2 = (\rho y - \sigma)^2$$

e si sarà soddisfatta anche la seconda delle equazioni date, y avendo il valore

$$2\sigma \frac{\rho + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\rho^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} ,$$

emerge da ciò che, per ogni valore di ρ, si ha una soluzione della doppia equazione proposta.

Di analogo trattamento sono suscettibili le equazioni doppie i cui primi membri hanno la forma $x^2 + \lambda_1 x + \sigma^2$, $\lambda_2 x + \sigma^2$ e delle quali Diofanto offre più di un esempio (V, 1; VI: 6 e 22); si formi infatti la differenza dei primi membri e si noti essere:

$$x \{ x + (\lambda_1 - \lambda_2) \} = \left(x + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \right)^2 ;$$

si vedrà tosto che, se x è scelto in modo che sia

$$\lambda_2 x + \sigma^2 = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \right)^2 ,$$

sarà

$$x^2 + \lambda_1 x + \sigma^2 = \left(x + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2$$

e la doppia equazione sarà soddisfatta razionalmente.

In Diofanto non mancano nemmeno esempî di equazione doppie a primi membri quadratici. Questi sono sempre della forma $\rho^2 x^2 + \alpha_1 x + \beta_1$, $\rho^2 x^2 + \alpha_2 x + \beta_2$. Siffatte equazioni sono risolte considerando la differenza $(\alpha_1 - \alpha_2) x + (\beta_1 - \beta_2)$ dei loro primi membri. Se $\beta_1 = \beta_2$ (III, 13; IV, 27; VI, 8), se ne chiami β il comune valore, e si noti essere

$$(\alpha_1 - \alpha_2) x = \left(\rho x + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4\rho}\right)^2 - \left(\rho x - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4\rho}\right)^2,$$

si vedrà allora che coesistono le equazioni

$$\rho^2 x^2 + \alpha_1 x + \beta = \left(\rho x + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4\rho}\right)^2 \quad , \quad \rho^2 x^2 + \alpha_2 x + \beta = \left(\rho x - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4\rho}\right)^2$$

e sono soddisfatte dal valore razionale

$$x = \left\{ \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{4\rho}\right)^2 - \beta \right\} : \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Se poi $\beta_1 \lessgtr \beta_2$, si scriva la differenza dei secondi membri della data equazione come segue:

$$(\beta_1 - \beta_2)\left\{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} x + 1\right\} = \left\{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2(\beta_1 - \beta_2)} x + \frac{1 + \beta_1 - \beta_2}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2(\beta_1 - \beta_2)} x + \frac{1 - \beta_1 + \beta_2}{2}\right\}^2;$$

allora si sarà indotti a porre

$$\rho^2 x^2 + \alpha_1 x + \beta_1 = \left\{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2(\beta_1 - \beta_2)} x + \frac{1 + \beta_1 - \beta_2}{2}\right\}^2$$

$$\rho^2 x^2 + \alpha_2 x + \beta_2 = \left\{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2(\beta_1 - \beta_2)} x + \frac{1 - \beta_1 + \beta_2}{2}\right\}^2;$$

così la doppia equazione è soddisfatta; ma in generale x non risulterà razionale; lo sarà però supponendo

$$|\rho| = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2(\beta_1 - \beta_2)}:$$

in tali condizioni trovasi appunto l'unica equazione doppia del detto tipo trattata da Diofanto (III, 13).

Questo è quanto sa, od almeno insegna, il nostro autore intorno alla risoluzione delle equazioni doppie; non fa mestieri spendere

molte parole a dimostrare quanto ingegno ed abilità egli abbia spiegati in tale circostanza, ma è dovere convenire che i risultati da lui stabiliti hanno limitata generalità.

53. Intento e natura differente dall'intento e dalla natura che ha il metodo della doppia equazione possiede un altro procedimento usato da Diofanto (V: 9, 11, 12, 13 e 14) e da lui chiamato di approssimazione (παρισότητος ἀγωγή), perchè serve ad avvicinarsi ai valori che hanno certe quantità soggette a determinate condizioni. In che consista si vede dalla seguente questione in cui Diofanto lo applica.

V, 11. $x+y+z=1 \;,\; x+a=u^2 \;,\; y+a=v^2 \;,\; z+a=w^2$

Per potere « dividere l'unità in tre parti tali che ciascuna, aumentata di un numero dato a, divenga un quadrato » bisogna che a non sia della forma $8k+2$ (v. più avanti n. 56); prendiamo quindi $a=3$. Siccome dalle equazioni date eliminando x, y, z si deduce $u^2+v^2+w^2=10$, così se dividiamo 10 in tre quadrati e da ciascuno togliamo tre unità i residui saranno i valori di x, y, z.

Ma affinchè queste sottrazioni siano effettuabili devono quei tre quadrati essere maggiori di 3; onde il problema è ridotto a « trovare tre quadrati maggiori di 3 e la cui somma sia 10 ». A questo intento cominciamo dal determinare un numero che aggiunto a $\frac{10}{3}$ formi un quadrato, ossia, moltiplicando tutto per 9, un numero che aggiunto a 30 formi un quadrato. Ora se $30+\frac{1}{x^2}$ è un quadrato, lo è pure $30x^2+1$ e viceversa, onde, scelto ad arbitrio un numero α, si potrà porre $30x^2+1=$ $=(\alpha x+1)^2$ e si avrà $x=\frac{2\alpha}{30-\alpha^2}$. Preso $\alpha=5$, si avrà $x=2$, epperò $30+\frac{1}{4}$ sarà un quadrato, e così lo sarà quel numero diviso per 9; e realmente $\frac{10}{3}+\frac{1}{36}=\left(\frac{11}{6}\right)^2$. Ciò posto, il problema suenunciato può intendersi ridotto a determinare tre quadrati approssimativamente eguali a $\left(\frac{11}{6}\right)^2$ ed aventi per somma 10. Per risolverlo si osservi l'identità

$$10=3^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

e si considerino le frazioni

$$3 \quad , \quad \frac{3}{5} \quad , \quad \frac{4}{5} \quad , \quad \frac{11}{6} \;;$$

notando essere

$$3-\frac{35}{30}=\frac{11}{6} \quad , \quad \frac{3}{5}+\frac{37}{30}=\frac{11}{6} \quad , \quad \frac{4}{5}+\frac{31}{30}=\frac{11}{6}$$

nasce spontanea l'idea di prendere

$$3 - 35\xi \quad , \quad \frac{3}{5} + 37\xi \quad , \quad \frac{4}{5} + 31\xi$$

come lati dei quadrati cercati, ξ essendo una quantità da determinarsi mediante l'equazione

$$(3 - 35\xi)^2 + \left(\frac{3}{5} + 37\xi\right)^2 + \left(\frac{4}{5} + 31\xi\right)^2 = 10 .$$

Se ne trae $\xi = \frac{116}{3555}$, epperò tre numeri che risolvono la questione primitiva sono:

$$x = \left(3 - \frac{35 \cdot 116}{3555}\right)^2 - 3 \ , \ y = \left(\frac{3}{5} + \frac{37 \cdot 116}{3555}\right)^2 - 3 \ , \ z = \left(\frac{4}{5} + \frac{31 \cdot 116}{3555}\right)^2 - 3.$$

54. L'ultimo dei libri superstiti dell' *Aritmetica* di Diofanto possiede quell'unità di argomento che si cerca indarno nei precedenti: esso infatti tratta esclusivamente della costruzione di triangoli rettangoli in numeri (razionali) soddisfacenti a certe condizioni (1); per risolvere i relativi problemi il geometra greco si giova, oltre che dei concetti che anteriormente indicammo, di altri due, che si desumono dallo studio e dal paragone dei vari procedimenti da lui usati. Uno consiste nell'esprimere i lati x, y, z del triangolo ignoto in funzione di una variabile indipendente (per modo cioè che l'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ sia verificata identicamente) e determinare per questa un valore tale che siano soddisfatte tutte le condizioni del problema. L'altro è in un certo senso un metodo per tentativi, in altro senso un metodo di riduzione; consiste nel supporre che il triangolo domandato sia simile ad un triangolo ausiliare λ, μ, ν, che cioè i suoi lati abbiano espressioni della forma $\lambda\xi, \mu\xi, \nu\xi$, essendo $\lambda^2 + \mu^2 = \nu^2$; allora le condizioni date traduconsi in equazioni fra λ, μ, ν le quali di regola non sono soddisfatte (anche scegliendo ξ convenientemente) se non si elegge in modo speciale il triangolo ausiliare: onde il problema proposto viene surrogato con altro, il quale però è generalmente più facile. A togliere quanto di vago possiedono tali indicazioni riferiamo tre esempî nei quali quei metodi si vedono in azione; in uno è applicato il primo e nell'altro il

(1) Però di triangoli rettangoli Diofanto si servì già nei libri precedenti; v. III, 19; V: 7, 8, 21, 27.

secondo, mentre nel terzo il metodo dei triangoli simili si atteggia in modo speciale su cui attiriamo l'attenzione del lettore; per il primo e terzo esporremo lo schema della soluzione in linguaggio moderno, ma del secondo daremo la soluzione diofantea fedelmente tradotta.

VI, 19.

Determinare un triangolo rettangolo tale che l'area aumentata di un cateto faccia un cubo ed il cui perimetro sia un quadrato.

Si osservi che, dall'applicazione del metodo di Pitagora, per costruire i triangoli rettangoli in numeri (v. n. 21), emerge che, qualunque sia ξ, i tre numeri $2\xi+1$, $2\xi(\xi+1)$, $2\xi^2+2\xi+1$ misurano i lati di un triangolo rettangolo, onde lo stesso potrà ripetersi riguardo agli altri

$$\frac{2\xi+1}{\xi+1}\,,\ 2\xi\,,\ \frac{2\xi^2+2\xi+1}{\xi+1}\,.$$

Le condizioni del problema si traducono quindi nelle equazioni:

$$2(2\xi+1)=u^2\,,\ 2\xi+1=v^3.$$

Da esse si trae $2v^3=u^2$ a cui si soddisfa ponendo $u=4b^3$, $v=2b^2$ epperò $\xi=\frac{8b^6-1}{2}$. Ad ogni valore di b corrisponde un triangolo soddisfacente alle condizioni del problema; per $b=1$ si ha quello considerato da Diofanto.

VI, 6.

Determinare un triangolo rettangolo tale che l'area ed un cateto formino una data somma.

La somma data sia 7. Il triangolo cercato sia di data specie: $3x$, $4x$, $5x$.

Sarà $6x^2+3x=7$. Alla metà del coefficiente di x moltiplicato per sè stesso si aggiunga il prodotto del coefficiente di x^2 e del termine noto; il risultato dovrebbe essere un quadrato, mentre questa circostanza non si verifica; per ciò bisogna trovare un triangolo rettangolo tale che il quadrato di un semicateto più il settuplo dell'area sia un quadrato. Uno dei cateti sia x e l'altro 1. Si avrà $3\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$; e moltiplicando tutto per 4: $14x+1=$ *quadrato;* affinchè il triangolo sia costruito in numeri razionali è poi necessario che si abbia: $x^2+1=$ *quadrato.* La differenza (dei primi membri) è x^2-14x (1); ne sono fattori x e $x-14$; il quadrato della loro semidifferenza è 49, eguagliandolo al quadrato minore si ottiene $x=\frac{24}{7}$. Ritornando ora al problema primitivo pongo un cateto del triangolo ausiliare eguale a $\frac{24}{7}$

(1) Qui Diofanto applica il metodo della doppia equazione (v. n. 52).

e l'altro eguale a 1, o, moltiplicando tutto per 7, un cateto eguale a 24 e l'altro eguale a 7, epperò l'ipotenusa eguale a 25. Moltiplicando tutto per x si ottiene l'equazione $84x^2 + 7x = 7$, onde si ricava $x = \frac{1}{4}$. Il triangolo che soddisfa alla questione ha dunque per lati: $6, \frac{7}{4}, \frac{25}{4}$ (1).

VI, 16.

Trovare un triangolo ABC rettangolo in A di cui siano razionali i lati e la bisettrice BD di un angolo acuto (2).

Prendiamo un triangolo rettangolo ausiliare avente per cateti λ e $\mu > \lambda$ e per ipotenusa ν; detta poi ξ una quantità da determinarsi, minore di 1, si ponga:

$$AC = \lambda \ , \ AD = \lambda\xi \ , \ AB = \mu\xi \ , \ BD = \nu\xi.$$

Sarà

$$CD = \lambda(1 - \xi);$$

ma, per la proprietà caratteristica della bisettrice, è

$$\frac{BC}{BA} = \frac{CD}{AD},$$

quindi

$$BC = \mu(1 - \xi).$$

Essendo poi

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

si conclude

$$\xi = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{2\mu^2}$$

epperò:

$$AB = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{2\mu} \quad , \quad AC = \lambda \quad , \quad BC = \frac{\mu^2 + \lambda^2}{2\mu} \quad , \quad BD = \frac{\nu(\mu^2 - \lambda^2)}{2\mu^2} \quad ,$$

$$AD = \frac{\lambda(\mu^2 - \lambda^2)}{2\mu^2} \quad , \quad CD = \frac{\lambda(\mu^2 + \lambda^2)}{2\mu^2} \ .$$

Si ottiene così un triangolo rettangolo ABC con i lati e la bisettrice BD razionali; moltiplicando per $2\mu^2$ i valori trovati se ne ottiene un altro con tutti quegli elementi misurati da numeri interi.

---

(1) Se la somma data è a, si trova similmente:

$$x = \frac{2a}{a + 1} \quad , \quad y = a - 1 \quad , \quad z = \frac{a^2 + 1}{a + 1} \ .$$

(2) Perchè Diofanto non ha trattato l'analogo problema: « trovare un triangolo rettangolo ABC di cui siano razionali i lati e la bisettrice dell'angolo retto »? Evidentemente perchè sapeva che esso è impossibile dal momento che (detti a, c i cateti) quella bisettrice é espressa come segue: $\frac{ac}{a + c}\sqrt{2}$.

55. L'indicazione delle più notevoli questioni risolute da Diofanto conterebbe una lacuna ben grave se non vi si trovasse una menzione dell'unica questione presentata sotto forma concreta. Ne faremo quindi un cenno rapido, tanto più giustificato in quanto che, come vedremo, dall'enunciato di essa il Tannery volle dedurre una indicazione sull'epoca in cui visse il geometra che ci occupa.

V, 30.

Un tale ha comperate due qualità di vino, uno a 8 *dramme, l'altro a* 5 *dramme il congio. Il prezzo pagato è dato da un quadrato tale che aggiungendovi un dato numero* (60) *si ottiene un secondo quadrato, avente per lato la somma delle quantità dei due vini. Quanto vino di ciascuna qualità venne acquistato?*

Le equazioni del problema sono evidentemente

$$8x + 5y = u^2 \ , \ u^2 + 60 = (x + y)^2$$

ossia, eliminando u ed introducendo la nuova incognita $x + y = \xi$,

$$8x + 5y = \xi^2 - 60.$$

Eliminando una volta y e un'altra x si ottiene:

$$\xi^2 - 60 = 5\xi + 3x \ , \ \xi^2 - 60 = 8\xi - 3y ;$$

onde

$$\xi^2 - 60 > 5\xi \ , \ \xi^2 - 60 < 8\xi$$

epperò

$$\xi \geqq 11 \ , \ \xi \leqq 12$$

cioè

$$11 \leqq \xi \leqq 12.$$

Ora, poichè $\xi^2 - 60$ dev'essere un quadrato, porremo $\xi^2 - 60 = (\xi - \alpha)^2$ ed otterremo $\xi = \frac{\alpha^2 + 60}{2\alpha}$; α però deve scegliersi in modo che si abbia

$$11 \leqq \frac{\alpha^2 + 60}{2\alpha} \leqq 12$$

donde si vede che

$$19 \leqq \alpha \leqq 21.$$

Diofanto prende $\alpha = 20$ e conclude $x = \frac{59}{12}, y = \frac{79}{12}$. Sappiamo (v. n. 47) che si poteva prendere anche $\alpha = 3$; è notevole che a tale nuovo valore corrispondono i medesimi valori di x e y.

Senza arrestarci a rilevare che questa soluzione prova l'abilità di Diofanto nel calcolare i valori approssimati delle radici quadrate e la sua famigliarità col maneggio delle disuguaglianze (1), notiamo

(1) Secondo il Tannery (*Diofanto* T. I, p. 26) Diofanto sarebbe stato il primo nell'immaginare una trattazione delle diseguaglianze, analoga a quella delle eguaglianze.

che i prezzi del vino, non essendo stati assunti in base ad alcuna considerazione teorica, dal momento che i valori ottenuti per le incognite non hanno nulla di notevole, devono, secondo P. Tannery (1), essere stati scelti tenendo conto delle condizioni del mercato. E siccome sono molto alti, così è a credere che Diofanto abbia vissuto in epoca di carestia. Ora tale situazione critica si è cominciata a far sentire all'epoca dei Trenta tiranni, onde sembra scaturire una conferma della supposizione che il nostro matematico abbia vissuto verso la metà del III Sec. Tale argomentazione non è molto robusta (2); noi ne facemmo cenno soltanto considerando che, nella scarsità di elementi per determinare la cronologia degli antichi matematici, nessun dato, per quanto poco concludente possa sembrare, va trascurato.

56. Esaurita così l'enumerazione delle più cospicue questioni trattate da Diofanto ed indicati per sommi capi i procedimenti mediante i quali egli le risolve, bisogna che percorriamo un'altra volta l'*Aritmetica* per segnalare le proprietà dei numeri ivi applicate.

Di alcuni fra i relativi teoremi Diofanto si giova per risolvere le equazioni proposte, altri intervengono nei diorismi, cioè nella determinazione delle condizioni di risolubilità (3); certuni esprimono delle semplici identità algebriche, ma in altri stanno racchiuse delle importanti prerogative di certi numeri; epperò essi furono germe di indagini importanti. Della maggior parte è ignota la fonte, ma alcuni sono tratti dall'opera sui *Porismi* (n. 40), ove forse Diofanto aveva ammassati i fondamenti teorici delle soluzioni che egli ha tramandate ai posteri.

Riferiremo gli enunciati dei teoremi di cui è parola, scrivendo accanto il numero del problema in cui essi trovansi adoperati.

I. 31. Se un numero è doppio di un altro, si ottengono due quadrati tanto addizionando alla somma dei loro quadrati il loro doppio prodotto, quanto sottraendo questo da quella (4).

---

(1) *A quel âge vivait Diophante?* (Bull. des Sc. math., 2.e Série, T. III, 1879, p. 261-269).

(2) In tal modo la giudica anche l'Heath p. 6-7.

(3) È bene notare che tali condizioni non sono sempre enunciate da Diofanto; ad es. nel problema V, 10 non è detto che $a+b+1$ dev'essere la somma di due quadrati; e nel problema V, 20 non è detto che $a-3a^3$ deve essere somma di tre quadrati, cioè non della forma $8m+7$.

(4) Se $b=2a$ è $a^2+b^2+2ab=(3a)^2$ e $a^2+b^2-2ab=a^2$.

I. 32. Se un numero è eguale al doppio di un altro più uno, addizionando al primo il quadrato del secondo si ottiene un quadrato (1).

I. 33. Se un numero è eguale al doppio di un altro meno uno, sottraendo il primo dal quadrato del secondo si ottiene un quadrato (2).

I. 34. Se al prodotto di due numeri si aggiunge il quadrato della loro semidifferenza si ottiene un quadrato (3).

III. 15. Affinchè sia risolubile la doppia equazione, di cui a_1x+b_1 e a_2x+b_2 sono i primi membri, a_1 e a_2 devono stare fra di loro come due quadrati (4).

III. 19. In ogni triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa rimane un quadrato aumentandolo o diminuendolo del quadruplo dell' area (5).

III. 19. Il prodotto di due numeri di cui ciascuno è somma di due quadrati è in due modi differenti somma di due quadrati (6).

IV. 19. Affinchè a^2x^2+bx+c sia un quadrato dev' essere $c=d^2$ e $b=2ad$. (7).

IV. 23. Affinchè $ax+b$ sia divisibile per $a'x+b'$ dev' essere $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$.

IV. 25. Dati tre numeri diseguali, la somma delle loro mutue differenze è eguale al doppio della differenza fra gli estremi (8).

IV. 29. Dalla soluzione che esponemmo (n. 51) di questo problema emerge che Diofanto riduce la proposta questione alla decomposizione di un numero razionale (che può sempre supporsi intero)

---

(1) Se $b=2a+1$, è $a^2+b=(a+1)^2$.

(2) Se $b=2a-1$, è $a^2-b=(a-1)^2$.

(3) $ab+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Cf. L. II, n. 11.

(4) Da quanto esponemmo in principio del n. 52 si vede che tale condizione è necessaria e sufficiente *per l'applicabilità del metodo di Diofanto;* ma è dessa necessaria *in generale?*

(5) Se $c^2=a^2+b^2$ è $c^2\pm 2ab=(a\pm b)^2$.

(6) V. la soluzione del problema III, 19 che esponemmo nel n. 51.

(7) Infatti, la condizione $b^2=4a^2c$ dà $c=\left(\frac{b}{2a}\right)^2$; onde, posto $\frac{b}{2a}=d$ si ottiene $c=d^2$ $b=2ad$.

(8) Se $a>b>c$ è $(a-b)+(a-c)+(b-c)=2(a-c)$.

in quattro quadrati. Il fatto che egli non si è occupato dei problemi corrispondenti in una, due o tre variabili, fa credere che — forse empiricamente (1) — ne abbia almeno intravvisto l'irrisolubilità; in altri termini che egli abbia almeno intuito il celebre teorema di Fermat " ogni numero razionale è somma di quattro quadrati o di un numero minore (2) ".

Questa conclusione — disforme dal modo di vedere dell'Hankel (3) — è, a parer nostro, confermata dal fatto che, mentre nei problemi V. 9 e 11 Diofanto assegna certe condizioni per la decomponibilità di un numero in due o tre quadrati, non ne pone alcuna quando nel problema V. 14 s'imbatte in una decomposizione in quattro quadrati.

IV. 38. L'ottuplo di un numero triangolare aumentato di 1 è un quadrato (cf. n. 37).

IV. 39. L'equazione doppia, avente $a_1x + b_1$, $a_2x + b_2$ per primi membri, è risolubile se b_1 e b_2 sono quadrati (v. n. 52).

V. 3 (porisma). Se tanto due numeri quanto il loro prodotto divengono quadrati per l'addizione di uno stesso numero, essi sono eguali ai quadrati di due numeri consecutivi diminuiti di quel numero (4).

V. 5 (porisma). Se si considerano i quadrati di due numeri consecutivi ed il doppio della somma di tali quadrati aumentata di 1, si avranno tre numeri tali che il prodòtto di due qualunque aumentato della somma degli altri due o del terzo è eguale ad un quadrato (5).

---

(1) Cossali, op. cit., T. I, p. 100.

(2) *Oeuvres de Fermat,* T. I, p. 305 e T. III, p. 252.

(3) Op. cit. p. 168-170.

(4) L'essere i due numeri di cui è parola di tale forma è *sufficiente*, ma non sembra *necessario*. Suppongasi infatti $x + a = p^2$, $y + a = q^2$, sarà $xy + a = p^2q^2 - a(p^2 + q^2) + a + a^2$, se inoltre (*) $xy + a = (pq - a)^2$ sarà $(p - q) = \pm 1$, onde $q = p \pm 1$, $x = p^2 - a$ e $y = (p \pm 1)^2 - a$; come appunto trova Diofanto. Ma la relazione (*) è forse necessaria?

(5) Infatti dall' essere

$$x = \alpha^2 \quad , \quad y = (\alpha + 1)^2 \quad , \quad z = 2(\alpha^2 + \overline{\alpha + 1}^2 + 1)$$

risulta:

$$xy + x + y = (\alpha^2 + \alpha + 1)^2 \quad , \quad xy + z = (\alpha^2 + \alpha + 2)^2$$
$$xz + x + z = (2\alpha^2 + \alpha + 2)^2 \quad , \quad xz + y = (2\alpha^2 + \alpha + 1)^2$$
$$yz + y + z = (2\alpha^2 + 3\alpha + 3)^2 \quad , \quad yz + x = (2\alpha^2 + 3\alpha + 2)^2.$$

V. 9. Se $2a+1$ è eguale alla somma di due quadrati, a è pari e $2a+1$ non ha alcun divisore della forma $4a+1$ (1).

Questo teorema appare come diorisma al problema V. 9; infatti dalle relative equazioni (v. l'*Elenco* dato nel n. 44) eliminando x, y si trae $u^2+v^2=2a+1$, onde il numero a non può scegliersi ad arbitrio; Diofanto dice che $2a+1$ è un numero o primo o di cui tutti i fattori hanno la forma $4a+1$.

In qual modo si arrivi a quest'enunciato si vede facilmente. Suppongasi infatti $2a+1$ primo e si osservi che: 1.° $2a+1$ non può essere che somma del quadrato di un pari e del quadrato di un dispari, 2.° il quadrato di un pari ha la forma $4p$ ed il quadrato di un dispari la forma $4q+1$; dunque $2a+1$ avrà di necessità la forma $4(p+q)+1$, cioè $4a+1$. Ora il prodotto di due numeri ciascuno dei quali è la somma di quadrati è pure la somma di due quadrati (v. sopra), onde un numero non primo, che sia somma di due quadrati, avrà per fattori numeri ciascuno dei quali è la somma di due quadrati, epperò della forma $4a+1$. Che viceversa i numeri primi della forma $4a+1$, e i composti nascenti dal moltiplicare numeri di tale forma, siano tutti e soli quelli che sono somme di due quadrati, è una proposizione che probabilmente Diofanto ignorò e di cui a Fermat (2) appartiene l'enunciato ed a Eulero (3) la prima dimostrazione.

V. 11. Se il numero $3a+1$ è eguale alla somma di tre quadrati, a non può avere la forma $8n+2$.

Questo teorema s'incontra come diorisma al problema V. 11; infatti dalle relative equazioni (v. l'*Elenco* dato nel n. 44) eliminando x, y, z si ottiene $u^2+v^2+w^2=3a+1$. Diofanto dice che a non si può scegliere ad arbitrio; e pone una limitazione giusta; giacchè, se fosse $a=8n+2$, sarebbe $3a+1=24n+7$ cioè della

---

(1) Cf. Jacobi, *Ueber die Kenntnisse des Diophantus von der Zusammensetzung der Zahlen* (Berliner Monatsberichte 1847; *Ges. Werke*, T. VII, 1891, p. 332-344), ove sono proposte alcune varianti al testo greco ed è fatta conoscere una divinazione delle considerazioni che guidarono Diofanto all'enunciato riferito.

(2) *Oeuvres de Fermat*, T. II, 1896, p. 431; oppure *Oeuvres complètes de Huygens*, T. II, 1889, p. 459.

(3) Nova Comment. Acad. Petrop., T. IV, VI e VIII, Cf. Legendre, *Zahlentheorie, deutsch von* H. Maser, T. I, (Leipzig, 1886), p. 208.

forma $8n+7$; ora Legendre dimostrò (1) che i numeri di questa forma sono gli unici non decomponibili in tre quadrati.

V. 16 (porisma). Ogni numero somma di due cubi è eguale alla differenza di due altri (2).

V. 29. Questo problema, il quale ha per iscopo la risoluzione della equazione $x^4+y^4+z^4=u^2$, dovrebbe essere preceduto da quello che consiste nel risolvere l'equazione $x^4+y^4=u^2$. Perchè invece Diofanto non se n'è occupato? La risposta venne data da Fermat (3), col dimostrare l'impossibilità di tale equazione; perciò è probabile che di tal fatto siasi accorto Diofanto, senza però saperlo stabilire in generale.

VI. 12 (secondo lemma). Se a e b sono due numeri la cui somma sia un quadrato, esistono infiniti numeri che rendono ax^2+b eguale ad un quadrato (4).

Va notato come curiosità che, nel problema III. 10, Diofanto dice essere impossibile rendere $52x^2+12$ eguale a un quadrato; eppure $52+12=8^2$!

VI. 14. Affinchè esista un valore (razionale) di x che renda ax^2-b^2 eguale ad un quadrato, è necessario che a sia somma di due quadrati (5).

---

(1) Op. cit. p. 386.

(2) Il Bachet, nella sua edizione commentata, dimostra questa proposizione osservando che, se

$$x=\frac{a}{a^3+b^3}(a^3-2b^3) \quad , \quad y=\frac{b}{a^3+b^3}(2a^3-b^3),$$

si ha

$$x^3+y^3=a^3-b^3.$$

Per una deduzione di quelle formole vedi un metodo del Poselger riferito dall' Heath (op. cit. p. 124).

(3) *Oeuvres de Fermat*, T. I p. 327 e T. III p. 264.

(4) Se $a+b=q^2$, si ponga $x=\xi+1$ e si avrà

$$ax^2+b=a\xi^2+2a\xi+q^2;$$

preso quindi un numero arbitrario ς si faccia

$$a\xi^2+2a\xi+q^2=(q-\varsigma\xi)^2$$

e si otterrà

$$\xi=\frac{2(a+\varsigma q)}{\varsigma^2-a} \quad , \quad x=\frac{a+2a\varsigma q+\varsigma^2}{\varsigma^2-a};$$

qualunque sia ς, questo è un valore razionale di x che rende $x^2+b=$ quadrato.

(5) Infatti, se per $x=\frac{p}{q}$ è $ax^2-b^2=l^2$, risulta $a=\left(\frac{lq}{p}\right)^2+\left(\frac{bq}{p}\right)^2$.

Invece quella condizione non è indispensabile per un binomio del tipo $a x^2 - b$, come prova l'esempio $266 x^2 - 10$, incontrato da Diofanto nel problema III, 13; ma va rilevato che, quantunque facendo $x = 1$ si ottenga $266 x^2 - 10 = 16^2$, il nostro autore nega la possibilità di trovare un valore di x che renda quadrato quel binomio (1).

VI. 15 (lemma). Se $ax^2 - b$ diviene eguale ad un quadrato per un certo valore di x, esisteranno altri valori maggiori di x godenti della medesima proprietà.

Per $a = 2, b = \pm 1$ questa proposizione scaturisce dalle proprietà dei numeri laterali e diametrali (v. n. 35); in generale si dimostra osservando che, se per $x = x_0$ risulta $a x^2 - b = q^2$, e si pone

$$x = x_0 + \xi \quad , \quad a(x_0 + \xi)^2 - b = (q - \rho\xi)^2 ,$$

risulterà

$$\xi = \frac{2(ax_0 + \rho q)}{\rho^2 - a} \quad \text{e} \quad x = x_0 + \frac{2(ax_0 + \rho q)}{\rho^2 - a} ,$$

valore razionale e maggiore di x_0 se si sceglie $\rho^2 > a$.

VI. 17. Nel corso di questo problema Diofanto trova che la equazione $u^2 + 2 = v^3$ ammette la soluzione $u = 5$, $v = 2$; seppe egli essere intera l'unica soluzione questa di quell'equazione? Probabilmente no (2). Ma quello che presumibilmente egli conobbe, almeno come frutto di esperienza, è che non esiste alcun triangolo rettangolo a lati razionali la cui area sia un quadrato (3); lo fa credere il fatto che egli non pose mai tale condizione negli enunciati dei problemi del Libro VI, mentre ne pose di più complicate (ma possibili) nei problemi 6-20 di questo libro.

---

(1) Quest'errore ne ricorda un'altro commesso da Diofanto, il quale, nel problema IV, 27, negò la possibilità di trasformare in un cubo il quadrinomio: $8x^3 + 8x - x^2 - 1$, mentre eguagliandolo a $\left(2x - \frac{1}{12}\right)^3$ oppure a $\left(\frac{8}{3}x - 1\right)^3$ si ottiene per x un valore razionale (*Diofanto ed. Tannery*, p. 251 del T. I; v. anche: Nesselmann, *Anmerkungen zu Diophant*, Zeitschr. f. Math. und Phys. T. XXXVII, 1892, Hist.-lit. Abth., p. 171).

(2) Questo fatto notevole venne avvertito da Fermat; v. *Oeuvres* T. II, p. 434, e anche *Oeuvres complètes de Huygens*, T. II, 1889, p. 460,

(3) Anche quest'osservazione appartiene a Fermat: v. *Oeuvres*, T. I p. 340, T. 2 p. 431, e T. III p. 271.

57. Lasciamo al lettore di valutare l'importanza delle or riferite proposizioni, in cui si trovano, oltre ad altre cose, i primi elementi della teoria della decomponibilità di un numero in un certo numero di quadrati e le prime proposizioni sulla risolubilità dell' equazione $ax^2 \pm b = y^2$: occupiamoci invece della questione storica importantissima dell' originalità di Diofanto.

È una questione analoga ad altre che incontrammo occupandoci degli *Elementi* di Euclide e della *Composizione matematica* di Tolomeo; è una questione che sembra inevitabilmente collegata a tutti i capilavori, ma sempre assai difficile, perchè da questi irraggia tutt' intorno tale e tanta luce che fa impallidire e talora scomparire tutto ciò che li circonda. Ora alle domande: " di chi fu discepolo Diofanto? quali precursori ebbe egli? „ il Bombelli rispose asserendo che maestri di Diofanto furono gli Indiani; ma a base di tale asserzione sta un equivoco (1): Bombelli giudicò scritto da Diofanto uno di quegli scolî, invece probabilmente dovuti a Massimo Planude. Per trovare altra risposta si ricorra alla prefazione dell' *Aritmetica* (v. n. 42); si vedrà intanto che Diofanto non si vanta di insegnare a Dionisio cose nuove, ma di presentarle sotto una forma da lui prescelta nell' intento di renderne facile l'intelligenza (2). Tale limitata originalità è confermata dall' osservazione che Diofanto enuncia semplicemente buon numero di proposizioni tutt' altro che evidenti (esempio: " meno per meno fa più „), le quali, se fossero state nuove, avrebbero avuto bisogno di dimostrazione, mentre ad altre allude in modo da affermare la novità (esempio: risoluzione delle equazioni trinomie). D'altronde esistono traccie indiscutibili di investigazioni compiute da Greci nei campi stessi ove Diofanto si atteggia a sovrano. Ed infatti l' epantema di Timarida (v. n. 23) non si riferisce forse ai sistemi di equazioni di primo grado? ed altrettanto vedremo nel Cap. seg. accadere di altre questioni con cui i Greci ebbero grande famigliarità. Inoltre la soluzione delle equazioni di secondo grado trovammo già nella sua sostanza in Euclide, e gli Orientali attribuirono (cf. L. III n. 47) ad Ipparco un

(1) Cf. Nesselmann, op. cit. p. 284-285.

(2) Schulz, trad. citata p. XXII-XXIV, Colebrooke p. LXII e Nesselmann p. 287. Cossali (p. 85-87) ritiene che Diofanto abbia spiegata la propria originalità nell' analisi indeterminata, non nella determinata.

lavoro sopra tali equazioni. Finalmente le applicazioni che esponemmo (n. 23) dell'epantema di Timarida sono di pertinenza dell'analisi indeterminata di I grado, mentre a quella di II appartengono le ricerche sui numeri laterali e diametrali (v. n. 35) ed un difficilissimo problema che vedremo (v. n. 62) venire attribuito ad Archimede.

Queste notizie sono certamente incomplete ed alcune troppo vaghe; a parer nostro però sono sufficienti a far escludere essere l'*Aritmetica prolem sine matre creatam;* al contrario esse ci fanno apparire il suo autore siccome un valente matematico, un abile trattatista che aduna i materiali raccolti da' suoi predecessori e ne compone un tutto organico, completando e aggiustando quello che appariva a' suoi occhi imperfetto.

Tale giudizio sull'indole scientifica di Diofanto è confermato dall'esame del frammento superstite dell'opuscolo *Sui numeri poligonali.* Ivi, infatti, non è adoperato alcun metodo nuovo, ma semplicemente quel procedimento esposto da Euclide nel II Libro degli *Elementi* e detto dal Cossali " aritmetica lineare „ e dallo Zeuthen " algebra geometrica „ (v. L. II, App. n. 1); nè è esposta alcuna teoria essenzialmente originale, ma è suggerito un rimaneggiamento dell'antica teoria dei numeri poligonali: mentre prima si consideravano anzitutto i numeri triangolari, poi i quadrati, quindi i pentagonali, ecc., Diofanto tratta subito dei numeri poligonali in generale. La connessione delle sue indagini con quelle di Ipsicle, a noi già note (v. L. III, n. 29), è da Diofanto candidamente riconosciuta; essa riesce evidente con una semplice ispezione delle proposizioni da lui esposte; eccole:

1. Se tre numeri sono equidifferenti, aggiungendo a otto volte il prodotto del massimo e del medio il quadrato del minimo si ottiene il quadrato della somma del massimo e di due volte il medio (1). 2. Dati quantisivogliano (n) numeri equidifferenti, la differenza tra il massimo ed il minimo è eguale a $n-1$ volte la differenza tra due consecutivi fra i numeri dati. 3. Dati quantisivogliano (n) numeri equidifferenti, la somma degli estremi moltiplicata per n dà il doppio della somma di tutti i numeri dati. 4. Data la serie $u_1 = 1, u_2 = 1+d, \dots, u_n = 1+(n-1)d$, si ha

$$8d(u_1 + u_2 + \dots + u_n) + (d-2)^2 = \{(2n-1)d+2\}^2$$

(1) Viceversa: se $8xy + z^2 = (x+2y)^2$ sarà $(x+z-2y)(x-z-2y) = 0$ onde $x-y = y-z$ oppure $x-y = y-(-z)$, onde sono equidifferenti x, y, z oppure $x, y, -z$.

In queste ipotesi $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ è un numero poligonale di $d + 2$ lati e $n + 1$ vertici; onde, posto

$$d + 2 = l \quad , \quad n + 1 = v \quad , \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n = P_v$$

la formola precedente diverrà

$$(1) \qquad 8(l - 2) P_{v,l} + (l - 4)^2 = \{(2v - 3)(l - 2) + 2\}^2 .$$

Questa generalizzazione di un teorema sui numeri triangolari, che trovammo in Giamblico (v. n. 37), serve a risolvere la seguente importante questione di analisi indeterminata: in quanti modi un dato numero può essere poligonale? Coll' enunciato di essa si chiude il brano superstite dell' opuscolo di Diofanto. Essa, non che alcune frasi che la seguono, sono giudicate dal Tannery (1) per un " commentatoris vanum tentamen "; ma G. Wertheim dimostrò (2) come, servendosi esclusivamente di considerazioni analoghe a quelle esposte da Diofanto, dato un valore a $P_{v,l}$ si possa risolvere, quando è possibile, l' equazione (1) (che è quadratica indeterminata in l, v) od almeno dimostrare che è irrisolubile (3). È questa una questione che già Bachet aveva affrontata e di cui Fermat aveva trovata una soluzione (4), della quale però si dichiarava insoddisfatto, di cui quindi non diede notizia al pubblico. Oggi, dopo il lavoro del Wertheim, ci sembra che nulla si opponga ad ammettere che Diofanto abbia proposto e anche risoluto, almeno in casi particolari, la questione che chiude lo squarcio che possediamo dell' unica sua opera teorica che ci pervenne.

---

(1) *Diofanto ed. Tannery*, T. I, p. 477.

(2) *Die Schlussaufgabe in Diophants Schrift über Polygonzahlen* (Zeitschrift für Math. und Phys., T. XLII, 1897; Hist.-lit. Abth., p. 121-126).

(3) Perchè esistono dei numeri che non si possono in alcun modo considerare come poligonali. Quasi per compenso, altri numeri sono più volte poligonali.

(4) *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 435. *Oeuvres complètes de Huygens*, T. II, 1889, p. 461.

VI.

Ricreazioni matematiche dei Greci.

I problemi dell'« Antologia greca ».

58. Già dicemmo ed in più circostanze ripetemmo che i Greci, seguendo i dettami di Pitagora divulgati da Platone, solevano distinguere nettamente l'arte del calcolo aritmetico dalla scienza dei numeri; quella abbassavano al livello di un semplice ausiliare del mercante e dell'agrimensore, ma questa equiparavano alle discipline più nobili ed elevate. Estranea all'una ed all'altra, ma porgente la mano ad entrambe, sta la disciplina risultante dai metodi per sciogliere i problemi pratici in cui sono numeri i dati e numeri le incognite, disciplina della massima importanza, se non altro perchè serve di stimolo potentissimo a sforzi per affinare tanto la logistica quanto l'aritmetica. Le opere di Erone, ove sono trattate aritmeticamente tante belle questioni con scheletro geometrico, e l'*Aritmetica* di Diofanto, ove si può misurare quanto fecondo sia stato il connubio della scienza con l'arte del calcolo, provano che a quella disciplina non rimasero estranei gli antichi pensatori. E ciò è confermato (oltre che da altri fatti in cui ci imbatteremo nel corso del presente capitolo) da una collezione di questioni aritmetiche, enunciate in versi, sotto forma di epigrammi, ed aventi per soggetti, non l'applicazione dell'aritmetica alla geometria, non numeri astratti, ma sibbene fatti naturali o collegati alla vita civile; sono problemi analoghi all'ultimo del V Libro di Diofanto (v. n. 55) — il quale anzi fu accolto in quella collezione —. Sono problemi notevoli, ma non abbastanza teorici perchè i Greci accordassero loro un posto nell'aritmetica; i quarantotto " problemi dell'*Antologia greca* " (1) (tale è il titolo comunemente dato alla raccolta di cui è parola), venivano pertanto relegati nella logistica; è merito del Bachet di Méziriac di averli additati all'attenzione degli

(1) Cf. Susemihl, *Geschichte der griechischen Literatur in der Alexandrinerzeit*, II Bd. (Leipzig, 1892) p. 566-573.

storici pubblicandone una parte tradotta in versi latini nella sua edizione di Diofanto (1).

Autore di quella raccolta è detto un tal Metrodoro, senza però addurre alcun argomento per dirigere la scelta tra Metrodoro da Scepsi (2) e Metrodoro da Bisanzio (3), grammatico ed aritmetico che il Jacobs fa vivere sotto Costantino Magno (306-307 dell' E. v.), cioè poco dopo Diofanto. Metrodoro compose forse alcuni degli epigrammi che adunò, ma non tutti; infatti, oltre quello estratto dall' *Aritmetica* diofantea, uno è attribuito ad un certo Socrate, uno ad Euclide ed uno ad Archimede.

Un gruppo di problemi di ignota provenienza e semplicemente enunciati sparge di regola ben poca luce sul sapere del popolo nel cui seno venne prodotto; tuttavia i problemi dell' *Antologia greca* meritano uno studio accurato da parte nostra perchè, ponendoli in relazione con altre questioni risolute dai Greci e con certe investigazioni da essi recate a buon termine, si viene a dimostrare che gli Ellèni erano in grado di sciogliergli e che quindi non esistono argomenti intrinseci per espellerli dall'antica letteratura della gente di cui esponiamo i titoli di nobiltà scientifica.

59. Per procedere alla dimostrazione di questa tesi fa mestieri esaminare il contenuto della collezione citata, il che ci trarrà un po' in lungo, perchè le questioni trattate sono mescolate senz' ordine: alcune sono semplicissime, mentre altre sono abbastanza difficili, anzi una è tal nodo gordiano che soltanto Archimede ne potè essere l' Alessandro.

---

(1) Il lettore li troverà, tranne l' ultimo, nelle più recenti edizioni dell' *Antologia*, fra cui ricordiamo come ottima quelle di F. Jacobs (Leipzig, 1794 e 1813). Quelli riferiti dal Bachet passarono nelle storie dell' Heilbronner e del Montucla (T. I, p. 325 della II ed.) e nella edizione di Diofanto curata dallo Schulz. Tutti si trovano tradotti in tedesco nella monografia del Zirkel *Die arithmetischen Epigramme der griechischen Anthologie* (Programm des k. Gymnasiums zu Bonn, 1853) ed in appendice alla traduzione di Diofanto fatta dal Wertheim; siccome l'ordine in cui essi si trovano in queste due opere non è lo stesso, così noi designeremo ogni epigramma con due numeri, cioè con quello con cui lo designa lo Zirkel e poi con quello datogli dal Wertheim. Gli epigrammi 1, 3, 17, 18, 28, 29, 34 e 36 dello Zirkel si ritrovano nella II parte del *Räthselschatz heraug. von E. S. Freund* (Leipzig, Reclam, 1885) ove portano i numeri 115, 102, 144, 143, 142, 129, 141 e 122. Veggasi finalmente *Diofanto ed. Tannery*, T. II, p. 43-72.

(2) Susemihl, op. cit., T. II, p. 352-355.

(3) Id., T. I (Leipzig, 1891), p. 851.

Fra le prime notiamo la seguente:

45. 40.

Risposta data da Omero alla domanda di Esiodo: « di quanti combattenti si componeva l'esercito degli Elleni durante la guerra di Troja? » Sette schiere erano infiammati di eguale ardore; ognuna disponeva di cinquanta spiedi con infilzati altrettanti pezzi di carne; e ciascuno spiedo aveva dintorno novecento Achei.

Il numero cercato è evidentemente $7 \times 50 \times 900 = 31500$; per trovarlo basta sapere eseguire la moltiplicazione degli interi, onde quella questione non possiede alcun interesse matematico. Se la riferimmo, fu per osservare che i dati di essa, benchè presentati con tanta serietà, furono indubbiamente scelti a capriccio; infatti — oltrechè le notizie intorno alle guerre di Troja sono tutte vaghe e degne di nessuna fede — è facile vedere che colui che la formulò non si appoggiò nemmeno alle informazioni date da Omero nel II Libro dell'*Iliade* sulle forze degli eserciti belligeranti pel possesso di Troja (1). Tale osservazione ci sembra consigliare ad essere estremamente cauti nel trarre delle illazioni dai dati di qualche problema dell'*Antologia* (v. n. 55 e più avanti in questo n.°).

Un po' più difficili sono i problemi numerati dal Zirkel 6, 28, 29, 30, 31, 32 e dal Wertheim 43, 23, 24, 25, 26, 27; sono del notissimo tipo designato col nome di " problemi delle fontane "

(1) Infatti Omero dichiara (*Iliade* trad. Monti, II, 644)

« Sol dunque i duci e sol le navi io canto ».

E dai versi seguenti emerge che l'esercito assediante contava 1167 navi; riguardo al primo gruppo Omero dice che

« . . . . . ognuna cento prodi e venti,
« Fior di Beozia gioventù, portava » (id. v. 667-668),

mentre delle navi

« Di Metodo, Tammàcia e Melibèa
E dell'aspra Olizone . . . . .
. . . .
. . . . carca
Di cinquanta gagliardi era ciascuna » (id. 960-963).

Si può quindi considerare che le navi recanti a Troja l'esercito assalitore contenessero in media ciascuna un centinajo di combattenti e che quindi l'esercito stesso annoverasse circa cento mila uomini, numero ben diverso da quello assegnato dall'epigramma.

(alcuni dei quali s'incontrano anche nelle opere di Erone), come il lettore si persuaderà dal seguente esempio:

6. 43.

Io sono un leone di bronzo. Sono fontane i miei occhî, e la bocca e la pianta del piede destro. L'occhio destro riempirebbe la vasca in due giorni, il sinistro in tre ed in quattro il piede; finalmente alla bocca basterebbero sei ore per riempirlo. In qual tempo verrà riempita se versano acqua ad un tempo gli occhî, il piede e la bocca?

La stessa natura ha evidentemente quest' altro problema:

34. 29.

Mattoniere, io voglio finire questa casa. Oggi il tempo non è nuvoloso, guarda! Orbene, a me occorrono trecento mattoni. Altrettanti ne puoi fabbricare tu stesso n un giorno, mentre tuo figlio chiude il suo lavoro giornaliero con duecento e tuo genero con duecentocinquanta. Lavorando insieme quante ore vi bisogna per servirmi?

Risolubile con un semplice ragionamento è il seguente:

8. 8.

Creso dedicò sei coppe pesanti in totale sei mine, ognuna delle quali pesava una dragma (centesima parte di una mina) più della precedente.

Per trovare il peso in dragme della prima coppa basta evidentemente dividere per 6 la differenza $600-(1+2+3+4+5)=$ $=585$, onde è $97\frac{1}{2}$.

Esaminiamo ora il problema:

11. 4.

Fabbricami una corona di sessanta mine, mescolando opportunamente fra loro oro, rame, stagno e ferro. L'oro ed il rame formino $\frac{2}{3}$ della corona, l'oro e lo stagno $\frac{3}{4}$, l'oro ed il ferro $\frac{2}{5}$. Orbene! dimmi esattamente la quantità di oro, di rame, di stagno e di ferro che devi prendere.

Tale questione si traduce evidentemente nel seguente sistema di equazioni:

$$o+r+f+s=60 \quad , \quad o+r=40 \quad , \quad o+s=45 \quad , \quad o+f=24,$$

per risolvere il quale non vi è che da applicare l'epantema di Timarida (v. n. 23).

Molte questioni della raccolta che ci occupa — 5, 26, 27, 32, 37, 38, 39, 40 secondo lo Zirkel; 9, 21, 22, 27, 32, 33, 34, 35 secondo il Wertheim (1) — si riducono alla divisione di un dato numero in parti proporzionali a numeri dati; valga a dimostrarlo il seguente esempio:

37. 32.

O Diodoro, luminare dell'astronomia, fammi conoscere il tempo trascorso dall'istante in cui le ruote dorate del sole cominciarono a girare nell'estremo Oriente; tre quinti del tempo trascorso presi quattro volte danno quello che rimane del corso prima di giungere al fiume dell'Esperidi.

È chiaro che Diodoro per rispondere al quesito non aveva che da dividere 12 in due parti tali che una di esse fosse $\frac{12}{5}$ dall'altra. —

Non meno numerose sono le questioni (1, 2, 3, 4, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 35 e 36 secondo lo Zirkel; 1, 41, 2, 42, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 46, 18, 19, 20, 30 e 31 secondo il Wertheim) le quali sono riducibili alla soluzione di un'equazione del tipo:

$$\frac{x}{m}+\frac{x}{n}+\dots+a=x \quad . \tag{1}$$

Come esempio scegliamo la seguente:

24. 19.

Ecco la tomba che racchiude Diofanto — una meraviglia da contemplare! Con un artificio aritmetico la pietra insegna la di lui età: Dio gli concesse di rimanere fanciullo un sesto della sua vita; dopo un altro dodicesimo le sue guancie germo-

(1) Si potrebbe aggiungere la questione 41 dello Zirkel, 36 del Wertheim.

gliarono; dopo un settimo egli accese la fiaccola del matrimonio; e dopo cinque anni gli nacque un figlio. Ma questi — fanciullo disgraziato e pur tanto amato! — aveva appena raggiunta la metà dell'età a cui doveva arrivare suo padre, quando morì. Quattro anni ancora, mitigando il proprio dolore coll'occuparsi della scienza dei numeri, attese Diofanto prima di raggiungere il termine della sua esistenza.

Ove si presti fede a questo epigramma Diofanto si sarebbe serbato fanciullo sino a 14 anni, a 21 avrebbe messo barba, a 33 avrebbe preso moglie, a 38 sarebbe divenuto padre, ad 80 avrebbe perso il proprio figlio e ad 84 sarebbe morto. Se il lettore inclina ad accettare per veri questi dati biografici intorno al sommo aritmetico greco, noi non lo distoglieremo; ma siamo restii a seguire questo presunto esempio, perchè le condizioni del problema riferito ci sembrano troppo ben combinate per essersi realmente verificate, e d'altronde più sopra adducemmo un esempio che giustifica il poco valore che attribuiamo ai dati dei problemi che ci occupano.

Analoga alla (1) è l'equazione

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \ldots = a \tag{2}$$

che, in un caso particolare, s'incontra nel problema seguente:

12. 5.

O fabbro, della coppa di argento prendi un terzo, un quarto ed un dodicesimo; fanne tutto un mucchio e portalo nella fornace; agita a dovere ed estrai fuori la massa, che pesa una sola mina.

Ancor più notevoli sono tre problemi (43, 44, 46 secondo lo Zirkel; 38, 39, 45 secondo il Wertheim), la cui soluzione dipende da un sistema di equazioni del tipo seguente:

$$x + a = m(y - a) \quad , \quad y + a = n(x - a); \tag{3}$$

riferiamo di essi il seguente, che è attribuito ad Euclide:

46. 45.

Un mulo ed un'asina andavano insieme carichi di grano. L'asina gemeva sotto il gran peso. Il mulo se n'avvide e disse alla compagna: « Madre, perchè gridi

(1) V. i problemi 5 e 6 del Libro I di Diofanto.

tanto e ti lamenti quasi fossi una ragazza piagnucolosa? Se tu mi dessi un medimno del tuo peso io porterei il doppio di te, mentre se tu ne prendessi uno noi porteremmo un egual peso ». O abile geometra, determina il peso portato da ciascun animale.

Dei due problemi seguenti il primo dipende da due equazioni del tipo

$$(4) \qquad x + y = s \qquad \frac{x}{m} - \frac{y}{n} = a,$$

ed il secondo da due del tipo

$$(5) \qquad x + y = s \qquad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = a.$$

7. 7.

Ordino che le mille monete da me possedute vengano ripartite fra i miei due figli per modo che la quinta parte del figlio legittimo superi di dieci la quarta parte dell'eredità del figlio spurio.

9. 44.

Sopra le tre cariatidi di Zeto, di Amfione e della loro madre: « Noi due insieme, io, Zeto, e mio fratello pesiamo insieme venti mine. Prendi un terzo del mio peso ed un quarto di quello di Amfione; troverai sei mine, che è proprio il peso di nostra madre ».

Un altro problema dell'*Antologia* (13 dello Zirkel, 6 del Wertheim) si risolve mediante tre equazioni lineari con altrettante incognite; due altri (10, 42 o 3, 37) sono indeterminati (1) giacchè si traducono in equazioni lineari omogenee, non capaci che di individuare i rapporti delle incognite. Perciò di tutti questi problemi quello di gran lunga più difficile è il problema estratto, come dicemmo (n. 58), dall'*Aritmetica* di Diofanto. Ma dell'*Antologia greca* fa parte un altro problema estremamente più arduo, perchè appartiene all'analisi indeterminata di secondo grado. Prima di occuparcene vogliamo far cenno di altre questioni risolute dai Greci, le quali si trovano circa allo stesso livello di quelle enumerate nel n. presente.

(1) Il primo, riferendosi alla ripartizione di mele fra certe persone, sembra modellato sulle indicazioni di Platone (v. n. 12).

Il « problema della corona » di Archimede.

60. Narra Vitruvio (1) — nell'esordio al cap. III del IX Libro della sua *Architettura* — quanto segue:

Jerone, nobilitato della regia podestà della città di Siracusa, essendogli le cose prosperamente successe, ed avendo deliberato di porre al tempio una corona d'oro votiva, per grandissimo prezzo la diede a fare, fornendo a colui, che si prese il carico di farla, a peso la quantità dell'oro. Questi al tempo debito apportò al Re l'opera sottilmente fatta con le mani, e parve che al giusto peso dell'oro restituisse la corona. Ma poichè venne indiziato, che levatane una quantità di oro, altrettanto di argento in quella avesse posto, Jerone sdegnato di essere stato beffato, nè avendo a sua disposizione un mezzo per dimostrare il furto, pregò Archimede che prender volesse la cura di riconoscere il fatto, pensandovi molto ben sopra. Avendo Archimede allora posto il suo pensiero sopra di ciò, per caso entrò in un bagno. E disceso nella tinozza gli venne veduto che quanto del suo corpo entrava, tanto di acqua usciva. Per il che avendo ritrovato il metodo di poter dimostrare la proposta, non rimase più oltre nell'acqua, ma uscitone con grande allegrezza, andando ignudo verso casa, dimostrava ad alta voce d'avere ritrovato quello che cercava, perchè correndo tuttavia gridava *eureka, eureka,* cioè *ho trovato, ho trovato*. Dapoichè egli ebbe il principio di quella invenzione, fece due masse di peso eguale ciascuna alla corona, delle quali una era di oro, l'altra di argento; fatto ciò, empì d'acqua sino all'orlo un ampio vaso, prima vi pose dentro la massa d'argento, della quale quanto entrò di grandezza tanto uscì di umore, così trattane la massa rifuse tanta acqua sin che il vaso fosse nuovamente pieno, avendola col sestario misurata, si che all'istesso modo di prima s'agguagliasse col labbro. E da quello egli ritrovò quanto ad un determinato peso d'argento, certa e determinata misura d'acqua rispondesse. Ottenuto questo, depose la massa d'oro nel vaso similmente ripieno, trattala poi fuori, con lo stesso metodo aggiuntavi la misura, trovò che non era uscita altrettanta acqua, ma tanto meno, quanto in grandezza del corpo con lo stesso peso era la massa dell'oro minore della massa dell'argento. Infine riempito il vaso e posta nella stessa acqua la corona trovò che più acqua era uscita fuori per la corona che per la massa dell'oro dello stesso peso, e così facendo la ragione da quello, che era più della corona che dalla massa uscito, comprese che ivi era mescolato l'oro con l'argento, e fece manifesto il furto di colui che aveva preso l'incarico di fabbricar la corona.

In questa soluzione del celebre " problema della corona " il fisico addita il primo cenno del concetto di peso specifico. Il matematico osserva che essa riposa in ultima analisi sopra un sistema di equa-

(1) Vissuto sotto Augusto e Tiberio.

zioni del tipo (5). Detta infatti P il peso della corona, x e y i pesi delle quantità di argento e di oro adoperate, si ha tosto

$$x + y = P;$$

se poi si chiamano V_c, V_a, V_o i volumi della corona e di due masse egualmente pesanti di argento e oro, verrà l'equazione

$$\frac{x}{\left(\frac{P}{V_a}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{P}{V_o}\right)} = V_c \qquad \text{cioè} \qquad V_a x + V_o y = P V_c .$$

E da queste equazioni, essendo $V_o < V_c < V_a$, si trae

$$x = P\frac{V_c - V_o}{V_a - V_o} \quad , \quad y = P\frac{V_a - V_c}{V_a - V_o},$$

come ottenne Archimede. Ciò basta a provare quanto antica sia la considerazione e la risoluzione di equazioni del citato tipo (1).

La seconda lettera del Rhabda.

61. Altre indicazioni intorno ai metodi usati dagli antichi per risolvere i problemi del genere di quelli che incontrammo nell'*Antologia greca*, si ottengono ricorrendo al papiro di Akhmîm (cf. n. 12) e alla seconda delle lettere aritmetiche del Rhabda (cf. n. 13) (2).

Ed invero i problemi designati con i numeri 3, 4, 10, 11 nel primo degli or citati documenti si traducono nella ripartizione di numeri in parti proporzionali a numeri dati. Infatti il 3.° e il 4.° hanno per iscopo la distribuzione di una data somma fra certe persone colla condizione che le porzioni abbiano fra di loro rapporti assegnati; nel 10.° invece si tratta di vendere una casa di dato valore a tre riprese in modo che le somme ottenute riescano proporzio-

(1) Le surriferite parole di Vitruvio sono così esplicite che ci sembra a torto il Montucla abbia supposto che la soluzione data da Archimede pel problema della corona riposasse sul *principio* che porta il di lui nome.

(2) La parte che ci interessa in questo momento è intitolata *Metodo pei calcoli della vita comune* (μέθοδος πολιτικῶν λογαριασμῶν).

nali a dati numeri; e nell'11.° (1), conoscendo la " tassa di inaffiamento " totale pagata da tre agricoltori, seminanti assegnate quantità di grano, si domanda quanto pagò ciascuno. Similmente nei problemi 47-49 si suppone di mescolare tre tesori e di toglier poi dal totale una certa somma, e si chiede quale porzione si sottrasse da ognuno. Ad equazioni di 1.° grado ad un' incognita del tipo

$$x - \frac{x}{a} - \frac{1}{b}\left(x - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{c}\left[x - \frac{x}{a} - \frac{1}{b}\left(x - \frac{x}{a}\right)\right] - \ldots = m \tag{6}$$

dànno luogo i problemi 13 e 17; è un tipo che s'incontra anche come risolutore dei problemi che portano i numeri IX, XI e XVII nella seconda lettera del Rhabda. Nella medesima si trovano poi non meno di cinque problemi (I, III, X, XIII e XVI) che conducono ad equazioni del tipo (2); il che non recherà meraviglia a chi ricordi come il così detto calcolo " Hau " del *Manuale del calcolatore* egiziano (2), abbia appunto per intento la soluzione di equazioni di quella forma. Per dimostrare come le soluzioni date dal Rhabda coincidano nella sostanza con quelle oggi in uso, riferiremo enunciato e soluzione di una fra quelle cinque questioni:

I. Taluno dice ad un altro: $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$ delle argirie (3) che io possiedo fanno insieme 21; quante argirie possiedo? Il secondo, che ha lo spirito fine ed esercitato in tal fatta di questioni, gli risponde prontamente: Ne hai in tutto $57\frac{3}{11}$; infatti $\frac{1}{5}$ ne è argirie $11\frac{5}{11}$ e $\frac{1}{6}$ ne è $9\frac{6}{11}$, e la somma è 21.

Ecco il metodo per giungere alla risposta: Moltiplica i denominatori dei quantesimi, cioè 5 e 6; avrai 30; moltiplica il risultato per 21, verrà 630. Aggiungi ora 5 a 6; viene 11; dividi 630 per 11; viene $57\frac{3}{11}$, appunto il numero che rispose l'interrogato.

Emerge da ciò che, per risolvere l'equazione

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{n} = a,$$

(1) Per ulteriori notizie v. F. Hultsch, *Das elfte Problem des mathematischen Papyrus von Akhmîm* (Historische Forschungen Ernst Förstemann gwidmet, Leipzig, 1894, p. 39-56).

(2) Eisenlohr, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (Leipzig, 1891) II ed., p. 42.

(3) Monete d'argento.

Rhabda dà quella regola che noi oggi compendiamo nella formola

$$x = \frac{mna}{m + n}$$

Similmente nel problema VI (divisione di una somma in parti proporzionali a numeri dati) il Rhabda risolve un sistema di equazioni del tipo

$$x + y = a \quad , \quad mx = ny$$

mediante il procedimento simboleggiato nelle formole seguenti:

$$x = \frac{1}{m} \frac{mna}{m + n} \quad , \quad y = \frac{1}{n} \frac{mna}{m + n}.$$

Rhabda incontra poi un sistema della forma (3) in un problema somigliantissimo a quello che trovammo nell' *Antologia* sotto il nome di Euclide. È opportuno riferirlo.

V. Un tale dice ad un'altro: dammi 6 delle tue assarie (1), così io ne avrò il doppio di te. No, rispose l'altro, dammene piuttosto 6 delle tue, così ne avremo lo stesso numero.

Uno aveva 42 assarie e l'altro 30. Ecco come lo si trova: quintuplica e settuplica il numero di assarie richiesto da ciascuno; il numero risultante dalla moltiplicazione per 5 sarà ciò che possiede uno, e quello risultante dalla moltiplicazione per 7 ciò che possiede l'altro.

Il nostro autore non fa che verificare il risultato; il quale nasce dal porre $a = 6$, $m = 2$, $n = 1$ nelle formole

$$x = a\left\{1 + 2\frac{m + 1}{mn - 1}\right\} \quad , \quad y = a\left\{1 + 2\frac{n + 1}{mn - 1}\right\}$$

risolutrici del sistema (3). Quando avremo aggiunto che il Rhabda mostra, nei problemi II e XV, di essere in grado di sciogliere un'equazione del tipo

$$x - \frac{x}{m} - \frac{x}{n} - \dots = a$$

e nell' VIII un sistema della forma

$$x + \frac{y}{n} = y + \frac{x}{n} = a,$$

(1) Monete di rame.

potremo ritenere di avere dimostrata l'affinità esistente tra i problemi contenuti nell' *Antologia greca* e quelli risoluti nella seconda delle citate di lui lettere.

Il « problema dei buoi » di Archimede.

62. Due problemi escludemmo sino ad ora dalle nostre considerazioni intorno ai problemi dell'*Antologia greca*. Uno è la riproduzione di quello con cui si chiude il V Libro di Diofanto, e nulla abbiamo da aggiungere a quanto dicemmo su di esso (n. 55). L'altro appartiene pure all'analisi indeterminata di secondo grado ed è tanto difficile che nell'antichità " problema di Archimede „ era sinonimo di questione estremamente ardua e spinosa (1). Quantunque citato da Gemino (2) e ricordato in uno scolio del *Ciarmide* di Platone (cf. n. 12), esso venne escluso dalle prime edizioni dell'*Antologia*. Scoperto, un po' più di un secolo fa, da Lessing nel codice 77 *Gud. Graec.* della Biblioteca di Wolfenbüttel, venne da lui pubblicato (3) e da allora in poi fu oggetto di ricerche reiterate da parte di filologi e matematici.

Nell'elenco di coloro che se ne occuparono i più antichi sono J. e K. L. Struve (4), padre e figlio, il primo dei quali lo attribuì, non al Siracusano, ma ad un mediocre matematico inspiratosi all' *Odissea* di Omero (5), mentre il secondo liberò quel problema da gran parte della sua difficoltà col sopprimerne l'ultima parte (versi 31-44), che, come vedremo presto, contengono le condizioni più complicate. Quell' attribuzione e questa soppressione vennero

---

(1) Cf. Mazzucchelli, *Notizie istoriche e critiche intorno alla vita, alle invenzioni e agli scritti di Archimede Siracusano* (Brescia, 1737), p. 89.

(2) *Heronis Alex. geom. et stereom. reliquae*, ed. Hultsch, (Berolini, 1864), p. 218.

(3) *Zur Geschichte der Literatur. Aus den Schäzen des herzogl. Bibliothek zu Wolfenbüttel*, II *Beitrag* (Braunschveig 1773). Ivi Lessing inserì anche uno scolio anonimo contenente una pretesa soluzione del problema archimedeo ed un tentativo nello stesso senso di C. Leiste.

(4) *Altes griechisches Epigramm mathematisches Inhalts* (Altona, 1821).

(5) « Allora incontro ti verran le belle
Spiagge della Trinacria isola, dove
Pasce il gregge del Sol, pasce l'armento.
Sette branchi di buoi, d'agnelle tanti,
E di teste cinquanta i branchi tutti ».
Odissea, trad. Pindemonte, XII, 164-169.

nel 1828 gagliardamente combattute da Gottfr. Hermann, il quale, in un programma pubblicato dall' Università di Lipsia, sostenne l'autenticità dell'epigramma contenente il πρόβλημα βοεικὸν, facendo notare come di esso parli il succitato scolio al *Ciarmide:* è da rilevare che Hermann afferma (dietro informazioni somministrate dal Mollweide) che Gauss era in possesso di una soluzione del problema di Archimede.

Della questione occupossi poi il Nesselmann (1), negando l'autenticità dell'epigramma in base alla considerazione che ivi entra un numero triangolare, mentre, secondo lui, tali numeri non s'incontrano nella letteratura greca anteriormente a Nicomaco. Invece il Vincent (2), accrescendo la portata di un procedimento mutilatore suggerito dallo Struve figlio, espose l'idea che il problema proposto da Archimede non comprendesse in origine che i primi sedici versi dell'epigramma, e ne ridusse così il valore matematico a proporzioni insignificanti.

Un'attitudine recisamente opposta a quella scelta da queste ultimi assunse l'Heiberg (3), il quale cercò di mostrare come sull'autenticità del problema in questione non fosse ragionevole sollevare alcun dubbio. A tale scopo egli fece valere: 1.° la grande celebrità *apud veteres* del problema in questione, dimostrata, oltrechè da quello scolio al *Ciarmide,* da due passi di Cicerone; 2.° le relazioni notorie di Archimede con matematici della scuola d'Alessandria, quali Conone e Dositeo; 3.° il fatto che i numeri triangolari erano indubbiamente noti assai prima di Nicomaco. Tali ragioni hanno un valore che non tenteremo negare, ma però non bastano a troncare ogni discussione sull'argomento. Infatti, anzitutto lo scolio al *Ciarmide* è di mano e perfino di epoca ignota, onde non può servire a misurare l'antichità dell'apprezzamento ivi contenuto sul problema che ci occupa; e quanto ai passi di Cicerone, nulla assicura che le frasi vaghe che ivi si leggono alludano a questo problema e non ad altri

---

(1) Op. cit. p. 481 e seg.; Heath. p. 142-147.

(2) *Sur les problème des boeufs attribué à Archimède* (Nouv. Ann. de Mathématiques T. XIV, 1855, e T. XV, 1856). Cfr. anche l'articolo anonimo (del Terquem?) *Sur un problème d'analyse indeterminée attribué à Archimède et dit « de bovino »* nel primo degli or citati volumi.

(3) *Questiones Archimedeae* (Hauniae, 1879) p. 66-69.

risoluti dal siracusano. D'altronde la forma epigrammatica appartiene ad un'epoca posteriore ad Archimede; onde è possibile che chi compilò l'ultimo problema dell'*Antologia* (1) siasi giovato delle notorie relazioni di questo con i matematici del Museo per dare al suo scritto tal forma che ne fosse ammissibile la provenienza da Archimede. Per ciò la prudenza consiglia a ritenere ancora come sospetta la legittimità dell'attribuzione ad Archimede dell'epigramma *sotto la forma* in cui l'incontriamo nell'*Antologia;* ma nulla vieta di attribuirgli la paternità della *sostanza*, ricordando che il siracusano non isdegnò di occuparsi dell'invenzione di un giuoco matematico (2) e che la proposta di un problema praticamente insolubile, quale è quello di cui si tratta, concorda come atto di carattere, con la enunciazione di teoremi falsi, che Archimede vantasi (3) di avere fatta, allo scopo di dimostrare bugiardi certi geometri, che certamente si sarebbero affrettati a dichiararsi in possesso delle relative dimostrazioni (4).

63. Riferito così intorno ai varî pareri che vennero manifestati riguardo al problema di Archimede, prima di occuparci della soluzione di esso, presenteremo qui l'enunciato tradotto (5); indicheremo con un numero in parentesi il principio di ogni verso dell'originale.

Problema che Archimede trovò fra (gli) epigrammi ed inviò a coloro che si occupavano in Alessandria di cose di tal genere mediante lettera indirizzata ad Eratostene da Cirene.

(I) Calcola, o amico, il numero dei buoi del Sole, (II) operando con cura, se possiedi qualche scienza; (III) (calcola) in qual numero essi pascolavano una volta

(1) Secondo F. Hultsch, la redazione non sarebbe posteriore al principio del II Sec.; v. il § 18 dell'articolo ARCHIMEDES in Pauly-Wissowa *Real-Encyclopädie der class. Altertumswissenschaft.*

(2) Riguardo a tale *loculus archimedius* v.: Mazzucchelli op. cit., p. 28-30. Heiberg, *Questiones Archimedeae* (Kopenhagen, 1879), p. 43; Suter, *Der loculus Archimedius oder des Syntemachion des Archimedes* (Abh. zur Gesch. der Mash., IX Heft, 1899).

(3) Prefazione alle *Spirali.*

(4) Quest' osservazione è del Tannery; v. l' articolo *Sur le problème des boeufs d'Archimède* (Bull. des Sc. math., II Serie, T. V, 1881), p. 25-30.

(5) Ci serviamo del testo emendato che leggesi nella prima parte della memoria (che può giudicarsi come definitiva) di Krummbiegel e Amthor *Das Problema bovinum des Archimedes* (Zeitschr. f. Math. und Phys., T. XXV, 1880, Hist.-lit. Abth., p. 125-136 e 153-171); dalla seconda parte dello stesso lavoro togliemmo la sostanza degli sviluppi matematici esposti nel presente n.

sulle pianure (IV) dell'isola sicula Trinacria, distribuiti in quattro gruppi (V) di vario colore; uno di aspetto bianco latteo, (VI) il secondo splendente di color nero, (VII) il terzo poi di un bruno dorato, il quarto screziato; in ogni (VIII) gregge i tori erano in quantità considerevole distribuiti (IX) nei rapporti seguenti: ritieni i bianchi (X) come eguali alla metà ed alla terza (XI) parte (1) di tutti i neri ed ai bruni; (XII) i neri poi eguali alla quarta parte (XIII) ed alla quinta degli screziati e a tutti i bruni; (XIV) i restanti screziati considerarli poi (XV) come eguali alla sesta e alla settima parte (XVI) dei tori bianchi e di nuovo a tutti i bruni (XVII). Le giovenche erano invece distribuite nei rapporti seguenti: (XVIII) le bianche erano eguali precisamente alla terza (XIX) e quarta parte di tutto il gregge nero; (XX) le nere (XXI) alla quarta parte assieme alla quinta delle screziate (XXII) prese assieme ai tori; le screziate (XXIII) erano precisamente eguali alla quinta parte ed alla sesta (XXIV) di tutti gli animali del gregge bruno; (XXV) le brune poi vennero valutate eguali alla metà della terza parte (XXVI) ed alla settima parte del gregge bianco. (XXVII). Quando avrai determinato esattamente, o amico, quanti erano i buoi del Sole, (XXVIII) avrai distinto quanti erano i tori (XXIX) ed avrai anche trovato quanti erano di ciascun colore, (XXX) non ti si chiamerà certamente ignorante nè inabile nei numeri; (XXXI) però non ti si annovererà ancora fra i saggi. Ma ora (XXXII) bada bene a questi altri rapporti fra i buoi del Sole. (XXXIII) Quando i tori bianchi mescolavansi ai neri (XXXIV) formavano un gruppo equilatero (XXXV) in altezza e larghezza (2); le vaste pianure della Trinacria (XXXVI) erano allora tutte piene di buoi; (XXXVII) invece i bruni e gli screziati riuniti (XXXVIII) costituivano una figura (XXXIX) triangolare (3). (XLI) Quando avrai trovato tutto questo e l'avrai esposto sotto forma intelligibile (XLII) e avrai anche trovata la quantità totale dei buoi, (XLIII) allora, o amico, per quanto hai fatto va superbo come un vincitore (XLIV) e sta sicuro di venire considerato ricco di quella scienza.

Per chiarire la natura e l'entità delle difficoltà che offre questo problema risolviamolo con i procedimenti che oggi sono a tutti famigliari. Indichiamo perciò con v, x, y, z i numeri dei tori che entrano nei quattro greggi, con v', x', y', z' i corrispondenti numeri di giovenche, finalmente con p, q due interi. Sussisteranno allora, per dato, le equazioni:

$$v = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) x + y \quad , \quad x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) z + y \quad , \quad z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) v + y$$

$$v' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (x + x') \quad , \quad x' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (z + z') \quad ,$$

(1) Notisi che tutte le frazioni considerate sono decomposte in frazioni fondamentali.

(2) Il Wurm (*Jahrb für Phil. und Pädag.*, T. XIV, 1830, p. 194) interpretò diversamente il testo greco ne dedusse che i buoi formavano una figura rettangolare; in conseguenza il problema subisce una notevole semplificazione: v. il § 5 della memoria di Krummbiegel e Amthor.

(3) Nel tradurre, compendiammo, e così andò perduto il verso XL.

$$y' = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(v + v') \quad , \quad z' = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(y + y')$$

$$v + x = p^2 \quad , \quad y + z = \frac{q(q+1)}{2}$$

Dalle tre equazioni del primo gruppo si trae:

$$v = \frac{2226}{891} y \quad , \quad x = \frac{1602}{891} y \quad , \quad z = \frac{1580}{891} y \; .$$

Ora, dovendo essere interi i valori delle incognite, y sarà un multiplo di 891, onde potremo porre:

$$v = 2226\,\mu \quad , \quad x = 1602\,\mu \quad , \quad z = 1580\,\mu \quad , \quad y = 891\,\mu \; .$$

Sostituiamo questi valori nelle quattro equazioni del secondo gruppo e risolviamo le equazioni risultanti rispetto alle altre quattro incognite; otterremo così

$$v' = \frac{7206360}{4657}\mu \quad , \quad x' = \frac{4893246}{4657}\mu \quad , \quad y' = \frac{5439213}{4657}\mu \quad , \quad z' = \frac{3515820}{4657}\mu .$$

Tenendo poi conto della condizione che anche v', x', y', z' devono risultare interi, si conclude che μ dev'essere un multiplo di 4657 ($\mu = 4657\,\nu$) e quindi si potrà scrivere:

$$v = 10366482\,\nu \quad , \quad x = 7460514\,\nu \quad , \quad y = 4149387\,\nu \quad , \quad z = 7358060\,\nu$$
$$v' = 7206360\,\nu \quad , \quad x' = 4893246\,\nu \quad , \quad y' = 5439213\,\nu \quad , \quad z' = 3515820\,\nu$$ (1)

Sostituendo i valori trovati per v, x nella prima equazione del terzo gruppo si trova

$$17826996\,\nu = p^2 \quad \text{ossia} \quad p^2 = 2^2 . 3 . 11 . 29 . 4657\,\nu \; ,$$

equazione alla quale si soddisfa ponendo

$$\nu = 3 . 11 . 29 . 4657\,\xi^2 = 4456749\,\xi^2 \; ,$$

ξ essendo una nuova incognita. Si ha in conseguenza:

$$v = 46\,200\,808\,287\,018\,\xi^2 \quad , \quad v' = 32\,116\,937\,723\,640\,\xi^2$$
$$x = 33\,249\,638\,308\,986\,\xi^2 \quad , \quad x' = 21\,807\,969\,217\,254\,\xi^2$$
$$y = 18\,492\,776\,362\,863\,\xi^2 \quad , \quad y' = 24\,241\,207\,098\,537\,\xi^2$$
$$z = 32\,793\,026\,546\,940\,\xi^2 \quad , \quad z' = 15\,669\,127\,269\,180\,\xi^2.$$

(1) Facendo $\nu = 80$ si ottiene quella pretesa soluzione che — come dicemmo — fu pubblicata dal Lessing.

Per determinare ξ si deve tener conto dell'ultima equazione del problema, la quale, in forza dei valori trovati per y e z, prende il seguente aspetto:

$$\frac{q(q+1)}{2} = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4657^2 \cdot \xi^2 .$$

Moltiplichiamolo per 8 e poniamo

$$2q + 1 = t \quad , \quad 2 \cdot 4657\, \xi = u ;$$

essa diverrà

$$t^2 - 4\,729\,494\, u^2 = 1 .$$

È un'equazione indeterminata (cosidetta di Pell) di cui fa mestieri scoprire una soluzione tale che il corrispondente valore di u sia multiplo di 2.4657; il quoziente di ogni tale valore per questo numero è un valore di ξ, a cui corrisponde una soluzione del problema de' buoi. Orbene alla minima fra tali soluzioni corrisponde un numero di buoi del Sole espresso da 7766 seguito da 206541 zeri. È un numero astratto che l'autore dell'*Arenario* era certamente capace di concepire, ma è un numero di buoi che la Sicilia non può racchiudere! Per dare un'idea approssimativa dell'enormità di quel numero osserviamo che le ordinarie tavole logaritmiche portano in ogni pagina circa 50 linee con 50 cifre ciascuna, cioè in ciascuna pagina a un dipresso 2500 cifre; onde per iscrivere ciascuno dei valori trovati per $x, y, z, v, x', y', z', v'$ occorrerebbero più di 82 pagine, e per iscriverli tutti un volume di 660 pagine.

Da quanto precede risulta che il problema di Archimede merita di essere ascritto fra i più belli che annoveri la letteratura aritmetica, così bello che non ci sovviene alcuno che lo superi per eleganza di forma e valore di sostanza. Esso è difficile assai; ma chi può arrogarsi il diritto di negare ad un genio così originale e potente, qual era il Siracusano, la capacità di concepirlo e risolverlo?

Moscopulo ed i matematici di Bisanzio.

64. Le questioni trattate nell'*Antologia greca* appartengono a quella categoria di problemi figurati chiamati " ricreazioni matematiche ", a quei problemi che indussero Leibniz a sentenziare " les

hommes ne sont jamais plus ingénieux que dans l'invention des jeux „. Alla stessa classe appartiene la questione di " distribuire nelle n^2 caselle di un quadrato i numeri $1, 2, \ldots n^2$ per modo che la somma dei numeri scritti in una qualunque linea longitudinale, trasversale o diagonale sia sempre $\frac{1}{2} n (n^2 + 1)$ „.

Di questo problema -- che a prima giunta non si vede se sia possibile o non, determinato o meno — le origini sono oscure. Osservando che esso si può considerare come relativo ad una scacchiera e ricordando che l'invenzione del giuoco degli scacchi viene attribuita agli Indiani (1), taluno si credette autorizzato a credere che anche i così detti " quadrati magici „ abbiano vista la luce sulle rive del Gange. Tale argomentazione non ci sembra conclusiva, giacchè nulla prova che i Greci, senza ricorrere a considerazioni fondate sopra quel celebre giuoco, non abbiano potuto giungere almeno ad immaginare quel problema; basta a provarlo il quadrato parzialmente magico che incontrammo in Teone Smirneo (n. 34). Inoltre S. Günther pubblicò (2) e con molta dottrina commentò (3) un trattatello greco, esistente nella Biblioteca di Monaco (Cod. Gr. Fol. 100), ove sono insegnate due costruzioni pei quadrati magici contenenti $(2m + 1)^2$ elementi ed una per quelli che ne contengono $(4m)^2$; pei quadrati di $(4m + 2)^2$ elementi non si trova alcun metodo; ma esisteva probabilmente in una parte smarrita di quel trattato, giacchè in esso si rinvengono due esempî di quadrati magici di quel tipo.

L'autore dello scritto è un certo Emanuele Moscopulo (4), la cui epoca fu determinata da P. Tannery (5) osservando che quello scritto è dedicato a Nicola Artavasde Rhabda, di cui conosciamo una lettera scritta nel 1341; e siccome il lavoro sui quadrati magici è opera senile, così la nascita di Moscopulo dev' essere avvenuta in principio

(1) Lassen. *Indische Alterthumskunde,* IV Thl., Bonn 1862, p. 905.

(2) *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* (Leipzig, 1876) p. 195-203. Molti emendamenti al testo greco vennero indicati da A. Eberhard in *Hermes*, T. XI, p. 434.

(3) Id. p. 203-213. V. anche due addizioni di A. Labosne alla IV ed. (Paris, 1879) dei *Problèmes plaisants et délectables per G. C. Bachet, sieur de Méziriac* (p. 97 e 111).

(4) Il trattato del Moscopulo era stato tradotto dal De La Hire, ma la versione non venne pubblicata. Vedi Moutucla, op. cit., T. I, p. 347.

(5) *Manuel Moschopulos et Nicolas Rhabdas* (Bull. des Sc. math. et astr., 2.e Série, T. VIII, 1884, p. 263-277).

del Sec. XIV. Egli va pertanto ascritto al periodo in cui i Greci avevano smesso di parlare ed agire per proprio impulso, e limitavansi a ripetere quanto avevano detto e fatto i loro maggiori, o a divulgare quanto avevano appreso in contatto coi popoli orientali, che, da loro discepoli, erano divenuti loro maestri. Arrogi che Moscopulo non si atteggia a matematico originale. Sicchè è legittima la supposizione che quanto egli ci ha tramandato sia una pianta esotica di cui egli volle far gustare ai Greci i frutti saporiti. Tuttavia, sia perchè ciò non è dimostrato, sia perchè è impossibile compilare un catalogo esatto e completo della flora matematica indigena ellèna, era dover nostro di far cenno della presenza nell'antica letteratura matematica di una teoria a perfezionare la quale i matematici posteriori contribuirono assai; tanto più che si trova ivi per la prima volta il concetto di *ordine circolare* (ὥσπερ 'ανακυκλοῦντες) di più cose, che tanta importanza acquistò in processo di tempo.

65. Emanuele Moscopulo si connette ai dotti che in Bisanzio tennero ancora accesa la vacillante fiammella della ricerca scientifica nel campo matematico. A capo di essi starebbe, secondo il parere di un eminente filologo (1), un tal Leone da cui daterebbe il Rinascimento bizantino dei Sec. IX e X, al quale, in particolare, saremmo debitori della conservazione dell'unico manoscritto di Archimede che tuttora possediamo. Fra essi troviamo poi Michele Psello (2), la cui autorità già invocammo (n. 39) per determinare l'epoca in cui visse Diofanto; benchè soprannominato " primo dei filosofi „ egli non ci lasciò che una povera esposizione delle divagazioni aritmetiche dei rinnovatori del Pitagorismo e del Platonismo (3). Altri matematici dello stesso periodo sono: un monaco commentatore di Euclide, Barlaam di Calabria, di cui il Montucla (4) cita una *Logistica* (pubblicata nel 1600 dallo Chamber a Parigi) in greco ed in latino, ove è insegnato il calcolo con interi e frazioni (5); Giovanni Pediasimo la cui *Geo-*

(1) Heiberg, *Der byzantinische Mathematiker Leon* (Bibliotheca mathematica, 1887, p. 33-36).

(2) L'ultimo scritto dello Psello è datato 1092.

(3) Ψέλλου τῶν περὶ ἀριθμητικῆς σύνοψις (Parigi, 1538).

(4) *Histoire des Mathématiques*, 2.ª ed., T. I, p. 344. I punti di contatto della *Logistica* del Barlaam con i libri aritmetrici di Euclide vennero segnalati dall'Heiberg nelle note all'edizione da lui curata degli *Elementi*.

(5) Altre edizioni sono ricordate dall'Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid* (Leipzig, 1882) p. 17.

metria trovò nel Friedlain un dotto editore (1). inoltre Nicola Rhabda, che in più occasioni ci prestò ottimi servigi, e Massimo Planude, altro trattatista di cui ci siamo giovati ed il cui *Manuale* si chiude con due problemi, di cui riferiremo, finendo, gli enunciati, perchè essi entrano nella cornice del quadro che tentammo delineare nel presente capitolo.

I. Un tale, trovandosi in punto di morte, si fece portare il suo scrigno e divise fra i suoi figli il proprio denaro con le parole seguenti: « Io voglio ripartire equamente il mio denaro fra i miei figliuoli: il primo avrà una moneta ed un settimo del rimanente, il secondo ne avrà due ed un settimo del resto, il terzo tre ed un settimo del resto ». Giunto a questo punto il padre morì, senza essere arrivato al termine nè de denaro nè dell' enumerazione dei figli. Voglio sapere quanti erano i figli e quanto il denaro. II. Trovare un rettangolo avente lo stesso perimetro di un altro e la cui area sia un multiplo dell' area di questo.

Del primo di questi problemi il Planude indica e verifica la soluzione; come venne ottenuta non è facile indovinare (2). Pel secondo egli suggerisce di prendere come lati di uno dei cercati rettangoli, se λ è il rapporto delle due aree, $\lambda^3 - \lambda$ e $\lambda - 1$, e come lati del secondo $\lambda^3 - \lambda^2$ e $\lambda^2 - 1$; da chi egli apprese questa soluzione, che certamente non è farina del suo sacco, non sappiamo dire; essa è abbastanza elegante per fare onore a colui che l' ha inventata.

Con queste produzioni, di valore scarso e di provenienza oscura ed incerta, si chiude la letteratura aritmetica, anzi la letteratura matematica in generale, dei Greci antichi. L' astro di abbagliante splendore che durante tanti secoli aveva meravigliato il mondo dei pensatori, tramonta per non più risorgere. Ma non scompajono i benefici effetti della luce che, nel suo corso glorioso, esso aveva diffusa sull' umanità intera. Chè, non soltanto gli immortali geometri che produsse il fecondo suolo dell' Ellade sono meritamente da noi

(1) Programm der Studiananstalt Ansbach, 1866.

(2) Detto x il numero delle monete contenute nello scrigno, sussisterà la relazione

$$1 + \frac{x-1}{7} = 2 + \frac{1}{7}\left\{x - \left(1 + \frac{x-1}{7} + 2\right)\right\}\cdot$$

onde $x = 36$; il primo figlio ebbe quindi 6 monete ed altrettante ne ricevettero gli altri cinque. Questo problema venne generalizzato da Bachet de Méziriac (v. *Problèmes plaisants et délectables*, IV ed., Paris, 1879, p. 158).

considerati come maestri e guide e posti al livello di modelli che si può sforzarsi di eguagliare ma che è follia industriarsi di oltrepassare, ma tutta la nostra Aritmetica teorica è impregnata dei concetti (se non informata ai metodi) che stabilirono Pitagora e Platone, Nicomaco e Diofanto, e che i loro discepoli commentarono perfezionandoli. Infatti, se è lungi dalle idee moderne il seguire i due primi, quando sognano un generale rapporto fra numeri e cose, non c'ispiriamo forse ai loro esempî quando coltiviamo quegli studî sulle proprietà della serie naturale che Kummer, con frase profonda e geniale, chiamava la *chimica dei numeri?* E non è nelle loro opere che esistono le scaturigini delle indagini sui numeri figurati e quindi, se non le basi dell' odierna analisi combinatoria, almeno il primo cenno sulla fertilità dell'idea di introdurre considerazioni geometriche nella pura scienza del numero? E non è forse il diuturno studio dei frammenti superstiti dell'opera diofantea che ispirò Fermat nelle imperiture investigazioni che lo fecero assurgere al livello di padre dell' odierna teoria dei numeri?

Scopriamoci adunque dinnanzi agli aritmetici Greci con riverenza non disforme da quella che ci fa piegare le ginocchia dinnanzi ai geometri del periodo aureo: tributiamo ad essi, non la fredda e sterile ammirazione che suolsi accordare ad opere omai estranee al ciclo dei nostri pensieri, ma quel caldo entusiasmo di cui sogliono infiammare le fonti eterne di solida istruzione e di perenne diletto.

Possa siffatto sentimento diffondersi e trasformare in legione il drappello di credenti nella inestinguibile vitalità delle opere dei matematici greci; questo augurio facciamo convinti che soltanto in tal modo potranno venire vinte le resistenze tuttora opposte dalle molte importanti questioni storiche, a delineare e chiarire le quali aspira l'opera a cui in questo istante viene posta la parola *fine* (1).

---

(1) Nel congedarmi dal lettore (Febbraio 1902) il mio animo, con memore gratitudine, mi guida la mano a scrivere qui i nomi a me cari del compianto Prof. **Pietro Riccardi** e del mio ottimo amico Prof. **Giulio Vivanti**; il primo dei quali, coll'interesse lusinghiero ed attivo che spiegò per l'opera presente, quando essa era ancora inedita, mi somministrò un mezzo ambito e prezioso per ottenerne la pubblicazione; mentre il secondo, con la costante amorosa cura con cui si associò a me nella revisione definitiva del mio scritto, provò in modo indiscutibile come le varie vicende delle nostre esistenze non abbiano avuta la forza di allentare un vincolo che risale ai tempi della comune adolescenza.

INDICE

IV. Neopitagorici e Neoplatonici.

29. Esordio. *Nicomaco da Gerasa.* 30. Notizie intorno a Nicomaco e la sua *Introduzione all'aritmetica.* 31. Il I Libro della *Introduzione.* 33. Il II Libro. I *Theologumena arithmetica* e la « regula Nicomachi ». — *Teone da Smirne.* 34. La parte aritmetica dell'*Esposizione delle cognizioni matematiche necessarie per l'intelligenza di Platone.* 35. Continuazione. Numerali laterali e diametrali; loro applicazioni. — *Giamblico da Calcide.* 36. Vita ed opere di Giamblico. 37. Ciò che di notevole contiene il suo *Commento* a Nicomaco. — *Domnino da Larissa.* 38. Domnino ed il suo *Manuale d'introduzione all'aritmetica.*

V. Diofanto.

39. Notizie intorno a Diofanto. 40. Quali opere scrisse Diofanto e che cosa ne rimane. 41. Edizioni e traduzioni dell'*Aritmetica* di Diofanto. 42. Natura di essa e stato nel quale si trova attualmente. 43. Preliminari teorici dell'*Aritmetica;* simbolica ivi adoperata. 44. Le equazioni in Diofanto; elenco di quelle da lui risolte. 45 Gruppi di problemi. 46. Metodi per risolvere le equazioni di I grado ad un'incognita ed i sistemi di equazioni lineari. 47. Le equazioni di II grado. 48. Sistemi determinati di equazioni di grado superiore al I. Un'equazione cubica. 49. Analisi indeterminata di I grado. 50-51. Analisi indeterminata di grado superiore. 52-53. Continuazione; metodo della « doppia equazione » e metodo di « approssimazione ». 54. Costruzione di triangoli rettangoli in numeri. 55. Un problema figurato risolto da Diofanto. 56. Indice delle proposizioni aritmetiche applicate da Diofanto. 57. Originalità di Diofanto. Il suo scritto *Sui numeri poligonali.*

VI. Ricreazioni aritmetiche dei Greci.

I problemi dell' « Antologia greca ». 58. Le questioni figurate nell'aritmetica greca. Gli epigrammi matematici dell' « Antologia greca ». 59. Varie categorie in cui questi si possono distribuire. — *Il « problema della corona » di Archimede.* 60. Storia e soluzione di questo problema. — *La seconda lettera del Rhabda.* 61. Problemi aritmetici risolti nel papiro d'Akhmim e nella seconda lettera del Rhabda. — *Il « problema dei buoi » di Archimede.* 62. Storia di questo problema. 63 Soluzione di esso. — *Moscopulo ed i matematici di Bisanzio.* 64. I quadrati magici e Moscopulo 65. Cenni su alcuni matematici bizantini.

Epilogo.

Correzioni al Libro IV.

N. 2. La Sferopea fu trattata, non da *Euclide*, ma da *Archimede*. Sull' indentificazione di *Gemino* con *Aganis* vennero a ragione sollevati forti dubbî da P. Tannery (v. l' articolo *Le philosophe Aganis est- il identique à Geminns?* Bibl. math., 3.ª Serie, T. II, 1902, p. 9-11).

» 3. Manca il n.º d' ordine in principio del paragrafo, il quale comincia con le parole « Da tutto ciò che dicemmo ».

» 4. Invece di Βόηδος Βόηθς. In fine dell' ultima nota si legga Γεμίνου πρὸς εἰσαγωγὴν ecc.

» 11. La relazione trigometrica citata va scritta come segue

$$\frac{\text{sen}\, y + \text{sen}\, x}{\cos y - \cos x} = \cot \frac{x - y}{2}.$$

» 20. L' enunciato del Lemma di Euclide va modificato come segue:

« Se una retta AB si muove parallelamente a se stessa descrivendo con i suoi estremi due rette fisse concorrenti e trasporta seco un piano che si conserva pure parallelo a sè stesso e nel quale è tracciata una conica per la quale: 1.º AB è un diametro, 2.º le corrispondenti corde coniugate serbano una direzione costante, 3.º è costante il rapporto del quadrato dell' ordinata al prodotto dei due segmenti corrispondenti del diametro AB, il luogo geometrico di questa curva è una superficie conica. Se le due rette fisse invece di essere concorrenti fossero parallele, si avrebbe una superficie cilindrica ».

» 26. Il trattato sulla *Sfera* è un falso dovuto ad un amanuense del Sec. XV.

» 27. Nell' elenco dei nomi ricordati da Proclo si legga *Cratisto* invece di *Crasisto*.

» 28. Il 4.º periodo va letto così: « La divisione della matematica che supposero i Pitagorici e quella in uso fuori della loro scuola — e che noi riferimmo nel n. 2 come appartenente a Gemino » ecc.

» 30. In fine: invece di *ed almeno* leggasi *od almeno*.

» 31. Ultima nota. Nell' *Errata* al Vol. II delle *Oeuvres de Huygens* è indicata la sostituzione di *Apollonio* a *Pappo*.

» 33. Invece di Dionisidoro *d'Amisso* (*Ponto*) leggasi *da Melos*.

» 35. Le parole citate nella nota (2) si trovano effettivamente in Sereno ed. Heiberg pag. 52, linea 26.

» 37. Dopo il teor. 56; le proposizioni lemmatiche sono di *Sereno* non di Apollonio.

» 38. Nella prop. 9 si legga < 1 invece > 1.

Alcune di queste correzioni provengono da amichevoli appunti fattimi da P. Tannery e pei quali mi professo a lui qui riconoscente.

INDICE ALFABETICO

DEI NOMI CITATI IN TUTTA L'OPERA

AVVERTENZA. — I numeri romani indicano il *Libro*, i numeri arabici il *paragrafo*; l'iniziale *n* significa che la citazione si trova in nota.

NB. *Per errore nelle pagine pari* 140-160 *è stata posta l'indicazione del Libro III in cambio di quella del IV.*

Al compimento della Serie II delle Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena mancano i relativi Indici generali, alla compilazione dei quali si è già posto mano.